高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「連分数」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (6)　三枝 洋一　　　　　　　　　　　　　　　　2015 年 7 月 25 日

「ペル方程式」

この講義では,

$$x^2 - Ny^2 = 1 \quad (N \text{ は自然数})$$

という形の不定方程式の整数解 (x, y) について考えてみたいと思います．このような不定方程式は**ペル方程式**と呼ばれています．

まず，いくつか具体的な場合に解を見つけてみましょう．$(x, y) = (\pm 1, 0)$ はいつでも解になりますから，それ以外のものを探してみてください．

$$x^2 - 2y^2 = 1, \quad x^2 - 7y^2 = 1, \quad x^2 - 11y^2 = 1, \quad x^2 - 41y^2 = 1.$$

$(x, y) = (3, 2)$ は $x^2 - 2y^2 = 1$ の整数解になっていますね．他はどうでしょうか？

ペル方程式の整数解を見つける問題は，実は $\sqrt{N}$ の連分数展開と深い関係があります．これを $x^2 - 7y^2 = 1$ の場合に説明してみます．$\sqrt{7}$ は $[2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}]$ という周期 4 の循環連分数で表されます．このことから得られる式

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{7} - 2)}}}}$$

の右辺を整理すると，

$$\sqrt{7} = \frac{8\sqrt{7} + 21}{3\sqrt{7} + 8} \tag{$*$}$$

となります．ここで，分母に出てくる二つの整数 3, 8 に注目すると，

$$8^2 - 7 \times 3^2 = 64 - 63 = 1$$

となり，ペル方程式 $x^2 - 7y^2 = 1$ の整数解 $(x, y) = (8, 3)$ が得られました．実は，これは偶然ではありません．$x^2 - 11y^2 = 1$ など，他の場合にも試してみましょう．

なぜ，上のような方法でペル方程式の整数解が見つかるのでしょうか？その秘密は，等式 $(*)$ の右辺に隠れています．右辺の分子と分母に出てくる整数の並びを行列

で書くと $\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ となりますが，これについて $8 \times 8 - 21 \times 3 = 1$ という等式が成り立っています．つまり，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\sqrt{7} = \frac{a\sqrt{7} + b}{c\sqrt{7} + d}, \qquad ad - bc = 1$$

の二つが成り立つということになります．一つ目の式の分母を払うと

$$7c + d\sqrt{7} = a\sqrt{7} + b$$

となり，$\sqrt{7}$ が無理数であることと合わせて $a = d, b = 7c$ が得られます．これを二つ目の式に代入すると $d^2 - 7c^2 = 1$ となるので，(d, c) がペル方程式 $x^2 - 7y^2 = 1$ の解であることが分かるのです．

ここまでの説明ではまだ，

なぜ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ に対して $ad - bc = 1$ となるのか？

ということが明らかになっていません．次にこれを説明しましょう．一般に行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$ad - bc$ という値を A の**行列式**と呼び，$\det A$ と書きます．行列式はいろいろな性質を持っていますが，その中で最も重要なものの一つを挙げておきましょう．

行列 A, B に対し，$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$ となる．

これは $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおいて両辺を具体的に計算することで証明できます．興味のある人はぜひやってみてください．

さて，行列 $\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ がどうやって出てきたかを思い出してみましょう．これは $\sqrt{7}$ の連分数展開を整理して得られたものですが,「整理」の部分をもっと詳しく見ると，次の操作の組み合わせからなっています．

(1) $\sqrt{7}$ から 2 を引く．
(2) (1) の結果に 4 を足して逆数をとる．
(3) (2) の結果に 1 を足して逆数をとる．これを 3 回繰り返す．
(4) (3) の結果に 2 を足す．

これらの操作は全て一次分数変換であり，それぞれ $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ という行列で表すことができます（講義 (4) を参照してください）．このことから，

$$\begin{pmatrix}8 & 21\\ 3 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

という等式が得られます． $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の行列式はそれぞれ 1, −1, −1, 1 ですから，両辺の行列式をとって $\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$ を使うことで，

$$\det\begin{pmatrix}8 & 21\\ 3 & 8\end{pmatrix} = 1\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times 1 = 1$$

となります．これで $\begin{pmatrix}8 & 21\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ の行列式が 1 になる理由が分かりました．

以上の議論は，N が平方数でない場合には全く同様に機能します．ただし，循環の周期 m が奇数になる場合は， $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & d\end{pmatrix}$ という形の行列が m 回出てくるので，最後の det をとる部分の結果が $(-1)^m = -1$ となり，$x^2 - Ny^2 = -1$ の整数解が見つかることになります．この場合には，連分数展開が周期 $2m$ で循環しているとみなせば，$x^2 - Ny^2 = 1$ の整数解を見つけることができます．

分かったことを定理の形でまとめておきましょう．

定理 1. N を平方数でない自然数とし，$\sqrt{N}$ の連分数展開を $[a_0, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_m]$ とおく．ただし，必要なら循環を二回繰り返すことで，m は偶数にとっておく．等式

$$\sqrt{N} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + (\sqrt{N} - a_0)}}}}$$

の右辺を整理したものを $\dfrac{a\sqrt{N}+b}{c\sqrt{N}+d}$ とおくと，(d, c) はペル方程式 $x^2 - Ny^2 = 1$ の整数解である．

なお，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ は次の行列の積を計算することで求められる：

$$\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

注意 2. 定理 1 では,「$\sqrt{N}$ の連分数展開は 2 番目の項から循環が始まる」という,これまでの講義で出てこなかった事実が用いられています.これは,$\sqrt{N}$ を超えない最大の整数を a_0 とすると $\dfrac{1}{\sqrt{N}-a_0}$ が簡約的な 2 次無理数となることから分かるのですが,ここではこれ以上説明しないことにします.

この部分はあまり気にせずに,具体例をいろいろ計算してみてください.

例 3. $N=41$ の場合を考えてみましょう.連分数展開は $\sqrt{41}=[6,\dot{2},2,\dot{1}2]$ となり,循環の周期は 3 ですが,これを $[6,\dot{2},2,12,2,2,\dot{1}2]$ というふうに周期 6 で循環しているとみなします.定理 1 より,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を計算すれば,ペル方程式 $x^2-41y^2=1$ の整数解 (d,c) が求まることになります.ここから先は皆さん自身でやってみてください.

注意 4. 定理 1 で求めた整数解 (d,c) は,$(\pm 1,0)$ とは異なることが証明できます.特に,ペル方程式 $x^2-Ny^2=1$ は必ず $(\pm 1,0)$ 以外の整数解を持つことが分かります.余裕のある人は,この事実の証明にもチャレンジしてみましょう.