高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「連分数」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (5)　坂井　秀隆　　　　　　　　　　　　　　　　2015 年 7 月 25 日

「循環連分数と 2 次方程式」

1　循環小数と有理数

　有限小数と無限循環小数は有理数で表せ，その逆も正しいことはよく知られている．具体的な例で見てみよう．

$$x = 2.0676767\ldots = 2.0\dot{6}\dot{7}$$

とする．$x = 2 + y$ とおくと，$100y = 6.7 + y$ であるから

$$y = \frac{6.7}{100-1} = \frac{67}{990}$$

と計算できて，$x = 2 + \frac{67}{990} = 2047/990$ と有理数で書ける．
　また，1/7 を計算すると

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 \\ \cline{2-9}
7\,\big) & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 7 & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 3 & 0 & & & & & \\
 & & 2 & 8 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & 0 & & & & \\
 & & & 1 & 4 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & & 5 & 6 & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & & 3 & 5 & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & 5 & 0 & \\
 & & & & & & 4 & 9 & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & 7 \\ \cline{8-9}
 & & & & & & & & 3
\end{array}$$

となって，$1/7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ となる．必ず循環してしまうことは，7 で割ったあまりが 1〜6 の有限個しかないことから分かる．(0 が出てくると割り切れる．)
　連分数表示では，有理数は有限連分数で書ける．では，無限循環連分数はどのような特徴付けを持っているだろうか？

2　循環連分数

循環連分数は，整数係数の2次方程式を満たすことが分かる．これを見てみよう．

実数 x が循環連分数で，$x = [a_0, a_1, \ldots, a_k, \dot{a}_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, \dot{a}_{k+l}]$ と書けているとしよう．ここで，$y = [\dot{a}_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, \dot{a}_{k+l}]$ としておく．このとき

まず，y が整数係数の2次方程式を満たすことを見よう．

$$y = a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \cfrac{1}{a_{k+3} + \cdots + \cfrac{1}{a_{k+l} + \cfrac{1}{y}}}}$$

となるので，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k+2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k+l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ s & r \end{pmatrix}$ と p, q, r, s を決めるとこれらは整数であり，

$$\frac{1}{y} = \frac{q\frac{1}{y} + p}{s\frac{1}{y} + r}$$

となっているので，y は $py^2 + (q-r)y - s = 0$ を満たす．これを後の計算のために

$$ay^2 + by + c = 0 \tag{1}$$

と書いておこう．

y が2次方程式の解であることは分かったので，元の x についても調べたい．今見たのと同じような議論で

$$x = \frac{Ry + S}{Py + Q} \tag{2}$$

となるような整数 P, Q, R, S があることが分かる．とくに $RQ - PS = \pm 1$ であることにも注意しておこう．このような条件を満たすとき x と y は**対等**であるという．

関係式 (2) は逆に解けて

$$y = \frac{Qx - S}{-Px + R}$$

となる．方程式 (1) に代入すると

$$a(Qx - S)^2 + b(Qx - S)(-Px + R) + c(-Px + R)^2 = 0 \tag{3}$$

となり，x が整数係数2次方程式を満たすことが言えた．

問題． (1) の判別式と (3) の判別式が等しいことを示せ．

3　2次の無理数と Lagrange の定理

f, g を有理数，$D > 1$ を 1 より大きい整数の 2 乗で割り切れない自然数とする．このとき，$f + g\sqrt{D}$ の形の数を**2 次無理数**ということにする．

2 次の無理数は，整数係数 2 次方程式の解になる．実際 $x = f + g\sqrt{D}$ とすると x は

$$\left(x - f - g\sqrt{D}\right)\left(x - f + g\sqrt{D}\right) = x^2 - 2fx + f^2 - g^2D = 0$$

を満たすが，適当に整数倍すると整数係数にできる．各項の共通因子で割った方程式

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

を**正規化された方程式**と呼ぼう．このとき A, B, C には共通因子がない．正規化された方程式の判別式 $\Delta = B^2 - 4AC$ を x の**判別式**と呼ぶ．

また，整数係数 2 次方程式の実数解は，2 次無理数である．

これらの言葉を使って前節で見たことをまとめると，次が言える．

命題． 2 次無理数に対等な数は 2 次無理数で，対等な 2 次無理数の判別式は等しい[1]．

⋆ ⋆ ⋆

循環連分数は，2 次無理数であることが分かったが，逆に，2 次の無理数は循環連分数で表せることも言える．

Lagrange の定理． 循環連分数は 2 次無理数であり，また，2 次無理数は循環連分数で表せる．

2 次無理数が循環連分数で表せることを示そう．証明には，有理数が循環小数であること同様，“あまり” が有限個になることを使う．といっても

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + b_n}}}$$

としたときの小数部分 b_n は，整数のようなわけにはいかないので，本当に有限個の範囲でいいのだろうか？

まず，各 $1/b_n$ は元の 2 次無理数 x と対等なので，やはり 2 次無理数でさらに判別式も同じはずだ．これだけではなく，簡約的であるという概念も使おう．

[1] 正規化された方程式が正規化された方程式にうつることも確認しなくてはいけない．

2次の無理数 $x = f + g\sqrt{D}$ の共役数 x' を $x' = f - g\sqrt{D}$ で定める．

$$x > 1, \qquad -1 < x' < 0$$

のとき，2次の無理数 x は**簡約的**であるという．

定理を示すためには，(1) 同じ判別式 Δ を持つ簡約的な2次無理数は有限個であること，(2) 連分数の計算で，十分大きな n に対して，$1/b_n$ が簡約的になること，(3) 一度簡約的な $1/b_{n_0}$ が現れると，その先の $1/b_n$ がすべて簡約的なこと，を示せばよい．

(1) の証明．　$x = f + g\sqrt{D}$ を簡約的な2次無理数とし，その正規化された方程式を $Ax^2 + Bx + C = 0$ とする．簡約的であることから x ともう一つの解 x' は異符号であり，解と係数の関係より $AC < 0$ である．また，$\Delta = B^2 - 4AC > B^2$ となり，Δ は初めに決まっていたので，これを満たす B は有限個である．

それぞれの B に対して $4AC = B^2 - \Delta$ となるが，A, C は整数なので，A, C の可能性も有限である．したがって，正規化された方程式の個数は有限個であり，その解となる簡約的な2次無理数の個数も有限個である．　□

(3) の証明．　$z = 1/b_n$ を簡約的2次無理数として，$w = 1/b_{n+1}$ がまた簡約的であることを示す．z の整数部分を a_{n+1} としたので，$w = 1/(z - a_{n+1})$ である．さらに共役数も $w' = 1/(z' - a_{n+1})$ の関係で結ばれる．これは分母の有理化の計算を見れば分かる．

小数部分は $b_{n+1} = z - a_{n+1} < 1$ であったから，$w > 1$ は明らかである．また，$z > 1$ であるから $a_{n+1} \geqq 1$ であり，$-1 < z' < 0$ より $z' - a_{n+1} < -1$ となって，$w' = 1/(z' - a_{n+1})$ は $-1 < w' < 0$ を満たすことが分かった．よって w も簡約的である．　□

(2) の証明．　上の議論をよく見ると，w が簡約的になるのに，$z' < 0$ となることしか使っていない．よって，十分大きな n をとると，$z = 1/b_n$ に対して，$z' < 0$ となることを示せばよい．これには，先週見た有理数近似の考え方を使えばよい．

連分数展開から，$x = (R + S b_n)/(P + Q b_n)$ を満たす正の整数 P, Q, R, S がとれたが，ここで，$b_n = 0$ とおいた R/P は x の近似になっていた．ここで，一つ前の近似をとって $x = (\widetilde{R} + \widetilde{S} b_{n-1})/(\widetilde{P} + \widetilde{Q} b_{n-1})$ とすると，

$$x = \frac{\widetilde{R} + \widetilde{S} b_{n-1}}{\widetilde{P} + \widetilde{Q} b_{n-1}} = \frac{\widetilde{R} + \widetilde{S}\frac{1}{a_n + b_n}}{\widetilde{P} + \widetilde{Q}\frac{1}{a_n + b_n}} = \frac{\widetilde{R} a_n + \widetilde{S} + \widetilde{R} b_n}{\widetilde{P} a_n + \widetilde{Q} + \widetilde{P} b_n}$$

となり，S/Q は一つ前の近似 $\widetilde{R}/\widetilde{P}$ に等しかったことが分かる．よって，これもやはり n を十分大きくすれば x の近似になっている．

逆に解くと $z = 1/b_n = -(Qx - S)/(Px - R)$ となり，z' も

$$z' = -\frac{Qx' - S}{Px' - R} = -\frac{Q}{P} \cdot \frac{x' - \frac{S}{Q}}{x' - \frac{R}{P}}$$

と書ける．n を十分大きくとれば，$\left(x' - \frac{S}{Q}\right) \sim \left(x' - \frac{R}{P}\right) \sim (x' - x) = -2\sqrt{D}$ で，また，P，Q は正の整数であったから，$z' < 0$ となる．　□