高校生のための現代数学講座　　東京大学
「連分数」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　坂井　秀隆　　2015 年 7 月 18 日

「開平法とニュートン法」

この講義では，連分数から少し離れて，数の，様々な近似方法について見てみよう．

1　開平法

平方根を，小数の形で求める方法が開平法である．平方根は 2 乗を計算することの逆だから，まずは，2 乗の計算を見てみよう．

324^2 の計算を考える．これには

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d+\cdots)^2 = \quad & a^2 \; + \; (2a+b)b \; + \; (2(a+b)+c)c \\
& + \; (2(a+b+c)+d)d + \cdots
\end{aligned}
$$

のような公式が便利である．$a = 300, b = 20, c = 4$ とおいて計算すると

$$
\begin{aligned}
324^2 =& 300^2 + (2\times 300+20)\times 20 + (2\times 320+4)\times 4 \\
=& 90000 + 12400 + 2576 \qquad = 104976
\end{aligned}
$$

となる．

これを逆に解いてみよう．ここでは，1 桁の数字の平方は 1 桁または 2 桁の数字，2 桁の平方は 3 桁または 4 桁，3 桁の平方は 5 桁または 6 桁であることに注意する．また逆に，1 桁または 2 桁の平方根は 1 桁，3 桁または 4 桁の平方根は 2 桁，5 桁または 6 桁の平方根は 3 桁であることも分かる．

104976 を 2 桁づつ分けて $10|49|76$ のように書く．これは 3 桁の数の平方なので，まずは 3 桁目の数を決めよう．これは簡単で，$3^2 \le 10 < 4^2$ だから，3 と分かる．

2 桁目を求めよう．$a^2 = 90000$ なので $104976-90000 = 14976$ に対して，それを越えないもっとも大きい $(2\times 300+b)b$ を与える b を見つければよい．$14976 \div 60 = 24$ あまり 576 で，$b = 20$ ととれる．

次に 1 桁目は $14976 - (2\times 300 + 20)\times 20 = 2576$ に対して，それが $(2\times 320 + c)c$ となる c を求めればよく，$2576 \div 640 = 4$ あまり 16 より，$c = 4$ である．

整理してみると

$$
\begin{array}{r l}
\sqrt{10|49|76} & = 324 \\
9|00|00 & \\
\hline
1|49|76 & \\
1|24|00 & = (2a+b)b = (2\times 300+20)\times 20 \\
\hline
25|76 & \\
25|76 & = (2(a+b)+c)c = (2\times 320+4)\times 4
\end{array}
$$

これは，うまく計算が止まる例だったが，止まらなければ，小数点のあとに 0 を 2 つづつ書いて，この計算を続けることができる．

では，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ を計算してみよう．

$$\sqrt{2.\,00\,00\,00\,00\,00\,00} \quad =$$

$$\sqrt{5.\,00\,00\,00\,00\,00\,00} \quad =$$

問題　立方根を計算する方法を考えてみよう．

2　算術調和平均とニュートン法

$\sqrt{2}$ を小数で展開すると，これは無限に続いてしまって終わらない．$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, a_5 = 1.4142, \ldots$ という数の列を考えて，これを近似数列と呼ぶ．

S を実数としたとき，$\sqrt{S}$ の近似数列は，連分数による数の列がそうであったように，開平法で得た小数による数列以外にもいろいろ考えられる．

天下り式だが，次のような近似数列を考えてみよう．$a_1, b_1 > 0$ として，数列の組 $\{a_n, b_n\}$ を漸化式で

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}}$$

と定義する．はじめの a_{n+1} は a_n, b_n の算術平均 (相加平均)，あとの b_{n+1} は a_n, b_n の調和平均と呼ばれる．合わせて，算術調和平均と呼ぼう．

すぐに分かるのは，積が一定で変わらないことである．実際

$$a_{n+1}b_{n+1} =$$

さらに，$a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$ となるので，a_n, b_n の差がある程度小さければ，その差はどんどん小さくなる．n が十分大きいところで $a_n \sim b_n$ となると思うと，この数列はともに $\sqrt{a_1 b_1}$ に収束することが言える．このことから，$a_1 = 1, b_1 = S$ とすると $\sqrt{S}$ の近似数列が求まる．

$S = 2$ として，近似数列を求めてみよう．

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \tfrac{1+2}{2} = \tfrac{3}{2}, \qquad a_3 = \qquad\qquad a_4 = \qquad\qquad a_5 =$$

$$b_1 = 2, \qquad b_2 = \tfrac{a_1 b_1}{a_2} = \tfrac{4}{3}, \qquad b_3 = \qquad\qquad b_4 = \qquad\qquad b_5 =$$

さて，この計算は，**ニュートン法**と呼ばれる一般的な近似計算の特別な場合になっているので，それを見ておこう．まず $S = a_1 b_1$ としておくと，$b_n = S/a_n$ であるので，それを使って b_n を消去して a_n だけの漸化式を考えると

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{S}{a_n}\right)$$

となっている．この漸化式は次のような考えから出てくる．

グラフ $y = x^2 - S$ $(=: f(x))$ を考える．求めたいのは，このグラフと x 軸との交点である．しかし，その代わりに，与えられた正の数 a_n に対して，a_{n+1} を点 $(a_n, f(a_n))$ におけるグラフの接線と x 軸との交点の x 座標としよう．グラフとの交点を計算するには 2 次方程式の解の公式がいるが，接線との交点には四則演算しかいらない．

グラフの接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n) \\ &= 2a_n(x - a_n) + {a_n}^2 - S \end{aligned}$$

となるので，これと $y = 0$ との交点の x 座標 a_{n+1} は

と求まる．この a_{n+1} はグラフと x 軸との交点ではないが，もとの a_n よりも交点に近づいている．

ニュートン法の考え方は，f として 2 次式でないものもとれるので，より汎用性の高い近似方法を与えている．

3　π の近似

算術調和平均では，a_{n+1} として算術平均 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ をとったのだが，代わりに a_n と b_{n+1} の幾何平均 (相乗平均) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}$ をとると，円周率の近似数列が作れることが知られている．つまり，漸化式は

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

となる．ただし，$a_1 = 6, b_1 = 4\sqrt{3}$ とする．

実はこのとき，a_n は半径 1 の円に内接する 3×2^n 角形の周の長さであり，b_n は外接する 3×2^n 角形の周の長さである．

アルキメデスは，この数列から，$a_5 = 6.282064\ldots, b_5 = 6.2854296\ldots$ と計算して，2π の近似とした．

参考文献

[矢野健太郎] 矢野健太郎訳補『現代数学百科』（ブルーバックス，講談社）

[寺沢順] 寺沢順著『π と微積分の２３話』　(日本評論社)