高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「連分数」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　緒方　芳子　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2015 年 7 月 18 日

フィボナッチ数列と無理数の有理数による近似

1　フィボナッチ数列と黄金比

一限目の結果から無理数 α は連分数を用いて有理数近似することができる.

$$\left|\alpha - (a_0 + \frac{p_n}{r_n})\right| \leq \frac{1}{r_n^2}. \tag{1}$$

ここで $r_n \to \infty$ なので, 近似は n が大きくなるにつ入れてどんどん良くなる. もっと厳密にいえば、その精度は r_n^{-1} の 2 乗以上の速さでよくなる. この,r_n^{-1} の何乗の速さで近似がよくなるか, ということについて考えてみたい. 上の一般的な定理でそれは r_n^{-1} の 2 以上, というのは保証されているけれども, 本当はもっと良いのかもしれない.
一般には, これ以上速くはできないというのが 2 時限目の内容である.
無理数 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比と呼ばれる. この数の連分数展開をしてみると,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \ldots,] \tag{2}$$

となる. これは,

$$(\alpha - 1)^{-1} = \alpha \tag{3}$$

からわかる. さらに,p_n, r_n, q_n, s_n はフィボナッチ数列と呼ばれる数列によって与えられる. フィボナッチ数列とは規則

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{4}$$

によりつくられる数列のことである. この $\{f_n\}$ により $p_n = f_n$, $r_n = f_{n+1}$,$q_n = f_{n-1}$, $s_n = f_n$ と書くことができる. すなわち

命題 1. 黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数による有理数近似はフィボナッチ数列を用いて $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ で与えられる.

以上の情報をもとに $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の近似の精度を考えてみよう. 連分数の作り方から

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + q_n}{\alpha r_n + s_n} \tag{5}$$

が導かれる. これまで得られた情報を代入していくとこの式から

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{r_n}\right| = \frac{1}{r_n^2(\alpha + \frac{r_{n-1}}{r_n})}. \tag{6}$$

ここで $\frac{r_{n-1}}{r_n} \to \alpha^{-1}$ を用いると $\varepsilon_n := \frac{r_{n-1}}{r_n} - \alpha^{-1}$ は 0 に収束する. よって, どんな $0 < c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ についても n が十分大きいとき

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{r_n}\right| = \frac{1}{r_n^2(\alpha + \alpha^{-1} + \varepsilon_n)} > \frac{c}{r_n^2} \tag{7}$$

が成り立つ. いいかえれば, 黄金比は有理数近似しにくい.

2 ひまわりの種とフィボナッチ数列

ヒマワリの種は次の法則にしたがってつくられる.

1. 新しい種は原点を中心とした回転について周期的につくられる (毎回角度 θ だけ回転)
2. 新しい種がつくられると種製造機は中心から離れる方向へと動く
3. 時間がたつにつれて　２．の「離れるレート」は小さくなる

ヒマワリは種をびっしりと詰めたい. ここでは角度 θ にだけ注目してどうしたらよいか考える. θ が有理数の 2π 倍とすると, 種はある決まった角度にしかつかず, 放射状につくことになる.(間はスカスカ.) 無理数なら, 密にすることができる. しかし, 無理数でも, 有理数で非常に良く近似できたとしたら, やはりほぼ放射状になってスカスカになる. だから, 回転角として「有理数で近似しにくい無理数」を採用するといい. 上で学んだことから, 黄金比をとるといい. 実際, ヒマワリの種を観察してみるとフィボナッチ数列が出てくる.