高校生のための現代数学講座　　東京大学
「連分数」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　寺杣　友秀　　2015 年 7 月 18 日

「実数と連分数」

1　実数を有理数で近似する.

有理数は実数のなかで稠密である、という数学の定理があります。どういう意味かというと、どんな実数でも有理数を使っていくらでもよい近似が得られるという意味です。

10 進法をもちいれば、小数点以下 3 桁まで書けば、誤差は 1/1000 以下というように書く桁数を多くすれば精度をあげていくことができます。この場合分母は常に 10 の冪になり、気持ちがいいのですが、実用上は不便なこともあります。

自然界に現れる実数で私たちの暮らしに直接かかわってくるものの例として、地球の公転周期（＝ 1 年）と自転周期（＝ 1 日）の比があります。この日はおよそ

$$365.24219$$

です。これは 1 年は何日に相当するかあるいうかずなので、皆さんよくご存知のはずです。10 進法で近似するなら、10 年たったところで 1 年を 2 日長くして、100 年たったところで上の規則に加えて 1 年を 4 日長くして、. . . とすれば、ずれることはありませんが、4 年一度うるう年をいれて 1 日長くする、と決めたほうが便利です。これは上の数値を $365\frac{1}{4}$ で近似することになります。

正の実数を有理数で近似するとき、どうすれば分数の分母を小さくして、かつよい近似を得られるか？ということを考えてみたいと思います。1 よりより大きな数は整数で近似して、1 より小さい数はこの問題は逆数をとって、（つまり分母と分子を入れ替えて）1 より大きな実数に関する問題に帰着しす。

2　連分数.

以上の考察から実数を有理数で近似するアルゴリズムを考えてみることにしましょう。

方針１ 1 より大きな数 r についてはr の整数部分 a と小数部分 b に分け、

$$r = a + b, \ (a \text{ は自然数、} 0 \le b < 1)$$

a を近似値として採用し、r はその誤差と定める。もしもっとよい近似を求めたかったら、r の有理数近似を考える。

方針２ 1 より小さい数 r はその逆数をとって方針 1 に帰着する。

上の方針を式で書いてみます。r を 1 より大きい実数とします。

$$\begin{aligned} r &= a_0 + b_0,\ (a_0 \text{ は自然数、} 0 \le b_0 < 1) \\ \frac{1}{b_0} &= a_1 + b_1,\ (a_1 \text{ は自然数、} 0 \le b_1 < 1) \\ \frac{1}{b_1} &= a_2 + b_2,\ (a_2 \text{ は自然数、} 0 \le b_2 < 1) \\ &\cdots \\ \frac{1}{b_{n-1}} &= a_n + b_n,\ (a_n \text{ は自然数、} 0 \le b_n < 1) \end{aligned}$$

これは例えば $n = 3$ であれば次のように書けます。

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + b_3}}}$$

このようにして現れる分数を**連分数**といい、上の仕方で連分数を求めることを**連分数展開**を求める、といいます。

最後の現れる b_3 は $[0, 1)$ の数になります。従ってこの部分を 0 にした式

$$r_3 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

は r を近似する有理数となります。このようにして現れる分数を $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ と表します。

3　いくつかの例

　この方針で $\sqrt{2}$ を近似する有理数を上のアルゴリズムに従って求めてみましょう。まず $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ ですから、

$$\sqrt{2} = \underbrace{1}_{\text{整数部分 } a_0} + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{小数部分 } b_0}$$

$$\frac{1}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \underset{\text{分母の有理化}}{=} 1 + \sqrt{2} = \underbrace{2}_{\text{整数部分 } a_1} + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{小数部分 } b_1}$$

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2} = \underbrace{2}_{\text{整数部分 } a_2} + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{小数部分 } b_2}$$

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2} = \underbrace{2}_{\text{整数部分 } a_3} + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{小数部分 } b_3}$$

従って上の様に 3 回目まで行った時点の有理数による近似でる、$r_3 = [1, 2, 2, 2]$ を考えると、

$$r_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

で近似できます。どれくらい正確かみてみると、$(\frac{17}{12})^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$ でかなりよい近似であることがわかります。

　もう一回やってみると、ここまでの計算をつかって $r_4 = [1, 2, 2, 2, 2]$ は

$$r_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

となり $(\frac{41}{29})^2 = \frac{1681}{841} = 2 - \frac{1}{841}$ とよりよい近似が得られていることがわかります。有限の連分数をどんどん行い、無限連分数を考えることができます。今の場合、

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \cdots]$$

という表示がえられます。

問題 1. $\sqrt{3}$ を連分数展開せよ。

4　ユークリッドの互除法と連分数

同じことを有理数 $\dfrac{46}{32}$ について考えて見ます。（見てすぐわかるようにこれは既約分数ではありません。）これははじめから有理数ですが上の考えを適用してその連分数表示を考えてみます。

$$46 \div 32 = 1 \text{ 余り } 14 \quad \text{つまり} \frac{46}{32} = 1 + \frac{14}{32}$$
$$32 \div 14 = 2 \text{ 余り } 4 \quad \text{つまり} \frac{32}{14} = 2 + \frac{4}{14}$$
$$14 \div 4 = 3 \text{ 余り } 2 \quad \text{つまり} \frac{14}{4} = 3 + \frac{2}{4}$$
$$4 \div 2 = 2 \text{ 余り } 0 \quad \text{つまり} \frac{4}{2} = 2$$

従ってこれを連分数表示すると、

$$\frac{46}{32} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

この一連の操作を組み立て除法で次のように書くと便利です。小さい肩にある番号は商を立てる順番です。

$$\begin{array}{r|cc|l} & 46 & 32 & \\ 1^{(1)} & 32 & 28 & 2^{(2)} \\ \hline & 14 & 4 & \\ 3^{(3)} & 12 & 4 & 2^{(4)} \\ \hline & \boxed{2} & 0 & \end{array}$$

一番最後に$\boxed{2}$で割る割り算で割り切れて計算が終了します。この 2 は 46 と 32 の最大公約数になります。このようにして最大公約数を求めるアルゴリズム（計算の手順の方法）をユークリッドの互除法といいます。この計算により、$\dfrac{46}{32} = [1, 2, 3, 2]$ という連分数展開が得られます。ユークリッドの互除法は必ず有限回で終わるので、有理数は必ず有限連分数展開をもちます $\sqrt{2}$ は無理数であることが結論されます。

4.1 連分数の近似を解析する

それでは連分数はどれくらいのよさの近似をえることができるのでしょうか？実数 r の連分数展開を

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + b_n}}}}$$

と表したとします。ここで $a_0, \ldots, a_n$ は自然数になっています。この $n = 1, 2, \ldots$ の範囲でこの表示を考えると

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \frac{1}{a_n + b_n}, \\ b_{n-2} &= \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + b_n}} = \frac{a_n + b_n}{(a_{n-1}a_n + 1) + a_{n-1}b_n} \end{aligned}$$

と表されます。b_{n-2} は（整数）+（整数）$\times\, b_n$ が分母分子に現れる形になります。この調子で b_i で i を $n-2, n-3$ と減らしていくことを考えます。実は b_{n-3} も b_{n-4} も（整数）+（整数）$\times\, b_n$ が分母分子に現れる形になるのです。実際 $p_2 = a_n, q_2 = 1, r_2 = a_{n-1}a_n + 1, s_2 = a_{n-1}$ とおけば、

$$b_{n-2} = \frac{p_2 + q_2 b_n}{r_2 + s_2 b_n}$$

となりますから、

$$\begin{aligned} b_{n-3} =& \frac{1}{a_{n-2} + b_{n-2}} \\ =& \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{p_2 + q_2 b_n}{r_2 + s_2 b_n}} \\ =& \frac{r_2 + s_2 b_n}{(a_{n-2}r_2 + p_2) + (a_{n-2}s_2 + q_2)b_n} \end{aligned}$$

となるので

$$p_3 = r_2, q_3 = s_2, r_3 = a_{n-2}r_2 + p_2, s_3 = a_{n-2}s_2 + q_2$$

とおけば同じ形の

$$b_{n-3} = \frac{p_3 + q_3 b_n}{r_3 + s_3 b_n} \tag{1}$$

という形が得られます。b_{n-4} についても (1) と同様の式が得られます。ここまでをまとめて次の命題が得られます。

命題 2. $i = 2, 3, \ldots, n-1$ に対して、

$$p_{i+1} = r_i, q_{i+1} = s_i, r_{i+1} = a_{n-i} r_i + p_i, s_{i+1} = a_{n-i} s_i + q_i$$

と自然数たちを定めると、

$$b_{n-i} = \frac{p_i + q_i b_n}{r_i + s_i b_n}$$

が成り立つ。

次の定理が成り立ちます。

定理 1. $p_i s_i - q_i r_i = \pm 1$

Proof. $i = 2$ の時と 3 の時を見てみましょう。

$$p_2 s_2 - q_2 r_2 = a_n a_{n-1} - 1 \cdot (a_{n-1} a_n + 1) = -1$$

$i = 3$ のときは

$$p_3 s_3 - q_3 r_3 = r_2(a_{n-2} s_2 + q_2) - s_2(a_{n-2} r_2 + p_2) = r_2 q_2 - s_2 p_2$$

となるので $n = 2$ のときの結果から $r_2 q_2 - s_2 p_2 = 1$ となります。$i = 4, 5, \ldots$ でも同様です。 □

以上の準備のもとで r と r の連分数展開において b_n を 0 で置き換えた有理数の r_0 との誤差を計算してみましょう。$b_0 = \dfrac{p_n + q_n b_n}{r_n + s_n b_n}$ ですから、

$$r_0 = a_0 + \frac{p_n + q_n \cdot 0}{r_n + s_n \cdot 0} = a_0 + \frac{p_n}{r_n}$$

となります。r と r_0 の誤差を計算します。

$$\begin{aligned} r - r_0 =& \left(a_0 + \frac{p_n + q_n b_n}{r_n + s_n b_n}\right) - \left(a_0 + \frac{p_n}{r_n}\right) \\ =& \frac{p_n + q_n b_n}{r_n + s_n b_n} - \frac{p_n}{r_n} \\ =& \frac{r_n(p_n + q_n b_n) - p_n(r_n + s_n b_n)}{r_n(r_n + s_n b_n)} \\ =& \frac{(r_n q_n - p_n s_n) b_n}{r_n(r_n + s_n b_n)} = \pm \frac{b_n}{r_n(r_n + s_n b_n)} \end{aligned}$$

従って

$$|r - r_0| \leq \frac{1}{{r_n}^2}$$

が言えます。

　結論　連分数展開を使って有理数によって実数を近似するとその誤差は分母の 2 乗分の一で抑えられる。

参考文献

[木村俊一] 木村俊一著『連分数の不思議』（ブルーバックス、講談社）