高校生のための現代数学講座　　東京大学
「複素数の幾何学」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　寺杣　友秀　　2014 年 7 月 19 日

「等角写像の幾何学」

1. 初めに

版画家エッシャーが残した作品を見てみましょう。これは下の web site にあります。
http://www.mcescher.com/gallery/mathematical/circle-limit-iv/
これはサークル・リミットという版画です。まず少しの間鑑賞してみましょう。ここには不思議な対称性が潜んでいることがわかります。よく観察してみると、対称性の基本にあるのは折り返しであって基本の形の折り返しが繰り返されていることが見て取れると思います。端っこの方はどんどん基本の単位は小さくなりその繰り返しが無限に続いて、全体が有限の領域である円の内部に凝縮されています。ここで現れる対称性は複素数の一次分数変換を用いると非常にきれいあらわすことができます。この講義ではこれについて話をすることにしましょう。

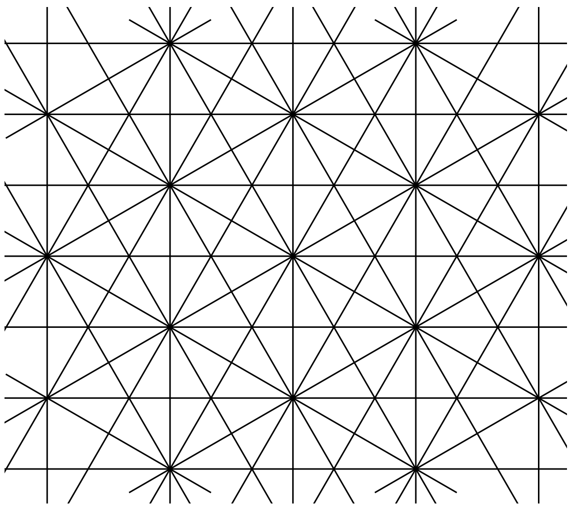
今回は

合同、直線、三角形

という順序で話を進めたいと思います。

2. 平面幾何学と合同

2.1. 図形の重ね合わせ. 上の対称性を述べるまえに通常の空間の対称性について考えてみましょう。角度が 30°、 60°、 90°の三角形を繰り返して折り返すことを考えてみます。この三角形は三角定規のなかの一つの三角形ですが、これは折り返して平面を埋め尽くすことがわかります。



すべてもとの三角形を折り返して作られているので、これらはもとの三角形と合同であることがわかります。それでは三角形をの折り返しを繰り返し用いて、重なりなく平面を埋め尽くすためにはどういった三角形でなくてはならないでしょうか？ここでは、一つの三角形を固定して、それぞれの頂点に集まっている三角形の数が偶数である場合を考えます。それが $2\ell, 2m, 2n$ であるとすると、その三角形のそれぞれの角は $\frac{2\pi}{2\ell}, \frac{2\pi}{2m}, \frac{2\pi}{2n}$ となるので、三角形の内角の和は π であったことに気を付け

ると、

$$\frac{2\pi}{2\ell}+\frac{2\pi}{2m}+\frac{2\pi}{2n}=\pi$$

となるのが必要条件であることがわかります。したがって

折り返しで平面を埋め尽くす三角形の条件

平面上において折り返しを用いて三角形を埋め尽くすための条件は

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$$

である。ただし $2\ell, 2m, 2n$ はそれぞれの頂点にあつまる三角形の数である。

ということが必要条件となることがわかります。実はこれを満たす (ℓ, m, n), $(\ell \le m \le n)$ は $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$ だけで、これは $(90°, 60°, 30°)$, $(90°, 45°, 45°)$, $(60°, 60°, 60°)$ を三角にもつ三角形に対応しているので、折り返して平面を埋め尽くします。

2.2. **合同に関する反省.** 平面幾何では合同という言葉を使っていますが、その意味をもう一度反省してみることにします。合同を平面の変換とみたものを合同変換といいます。合同変換として代表的なものとして次のようなものがあります。

(1) 平行移動。
(2) 回転。
(3) 直線に関する折り返し。

次のような事実があります。

事実 1　合同変換 f_1, f_2 を繰り返しおこなったもの $f_2 \circ f_1$ も合同変換になる。
　たとえばタイプ (1) の変換をおこないそのあとにタイプ (2) の変換をおこなっても実際合同変換になっています。

事実 2　すべての合同変換は (1),(2),(3) のタイプの変換を何回か繰り返しておこなうことにより得られる。

事実 3　(1),(2) のタイプの変換は図形の向きを変えない合同変換でこれらを何回か繰り返しておこなっても向きを変えない合同変換になる。

3. 円板幾何学、新しい意味での「合同」

3.1. **一次分数変換と角度.** この前の講義で一次分数変換というのをやりました。それは複素数 $z=x+yi$ に対して、複素数

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

に対応させる写像のことでした。また一次分数変換で円または直線は円または直線にうつることを観察しました。

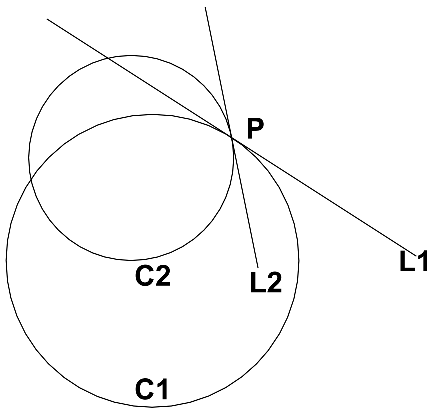
この章では複素共役と一次分数変換の合成である

$$g(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

という形の変換も考えてみることにしましょう。この変換を共役一次分数変換といいます。複素共役は、円または直線は円または直線にうつすので共役一次分数変換も円または直線を円または直線にうつすことがわかります。

ここでは、一次分数変換や共役一次分数変換は角度も変えないという事実を見てみたいと思います。直線の行先は直線とは限りませんから、「角度を保つ」という意味は少し慎重に考えなくてはなりません円または直線は円または直線にうつるので、直線は半径が無限に大きい円とみなして、二つの円のなす角度を定義することにしましょう。交わっている二つの円の交点における二つの円のなす角というのを、その点における二つの円のそれぞれの接線のなす角によって定義することにします。

円と円が交点においてなす角度



一次分数変換と共役一次分数変換は５つのタイプの変換を繰り返して得られていました。

(1) 原点を中心とする回転。
(2) 原点を中心とする拡大。
(3) 平行移動。
(4) 複素数共役をとる写像。
(5) 単位円に関する反転。

ここで反転というのは

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

で与えられる変換です。したがって一次分数変換や共役一次分数変換で円と円の交わりの角度が変わらないことをいうには、上の４つのタイプの変換で変わらないことを言えばよいのですが、(1),(2),(3)、(4) のタイプの変換では明らかにその角度は変えませんから、(5) の変換で角度が変わらないことがわかればよいことになります。

定理 1. (1) P が円の内部にある点として、P の反転による像を Q とする。P, Q を通る円 C は反転により不変である。

(2) 単位円に関する反転により、円と円のなす角度は変わらない。

証明. (1) C の反転による像を C' とします。このとき Q は単位円の外側にありますから、C は単位円と少なくとも一転 R で交わります。このとき C は P, Q, R を通ることに注意しましょう。R は単位円板上にあり、反転で不変ですから C' も P, Q, R を通ります。したがって $C = C'$ となります。

(2) ここでは角 A の頂点が P が円の内部にある場合を証明しましょう。P を通る円 C_1, C_2 で与えられた角を定めていて、ともに P の共役 Q を通るものがあります。C_1, C_2 はともに P, Q を通るので反転によって不変です。さらに角 A の像は円 C_1, C_2 のもう一つの交点にうつるので角度は等しくなります。 □

このことから一次分数変換または共役一次分数変換を等角変換、とここでは呼ぶことにしましょう。

3.2. 単位円板を単位円板にうつす等角変換. 等角変換で円または直線が円または直線にうつることみましたが、

(H): 単位円板の内部を単位円板の内部にうつす等角変換

を考えてみましょう。$|w| = 1$ なる複素数と $|a| < 1$ となる複素数 a をとって、

$$f(z) = w \cdot \frac{a + z}{1 + \bar{a}z} \tag{1}$$

という形にかける一次分数変換を考えると単位円は単位円にうつすことがわかります。実際 $|z| = 1$ とすると、

$$\left|w \cdot \frac{a+z}{1+\bar{a}z}\right| = \frac{|a+z|}{|1+\bar{a}z|} = \frac{|a+z|}{|1+a\bar{z}|} = \frac{|a+z|}{|(z+a)\bar{z}|} = 1$$

となり、0 の行先が $|a| < 1$ となるからです。逆に (L) の性質をもつ一次分数変換は (1) のような形をしていなくてはならないこともわかります。共役一次分数変換についても同様に $|a| < 1$ として、

$$g(z) = w \cdot \frac{a+\bar{z}}{1+\overline{az}} \tag{2}$$

という形のものは単位円の内部を単位円の内部にうつすことがわかります。また、(1) の性質をもつふたつの等角変換 $f_1(z), f_2(z)$ を考えたときその合成 $f_1(f_2(z))$ は、再び上の性質 (H) を満たすことがわかるでしょう。したがって、(1) または (2) の形の変換を合同変換として考えて、単位円板の中で閉じた、新しい幾何学を考えることができないでしょうか？

　次の章で考えたいものは、

合同変換を表す式

$$f(z) = w \cdot \frac{a+z}{1+\bar{a}z} \quad g(z) = w \cdot \frac{a+\bar{z}}{1+\overline{az}}$$

のタイプの変換を合同変換とする円板の中の幾何学です。この幾何学を（平面幾何ならぬ）円板幾何[1]とよぶことにします。

4. 円板幾何学の「直線」

　円板の中の二つ図形 A, B があったとき、それらが合同であるとは A が (1) または (2) の変換で B にうつされること、として定義します。新しい幾何学、円板幾何学の「直線」を

単位円板の中の半径と合同な図形

として定義します。と定めることにしましょう。以下かっこ付きの「直線」とは新しく定義した円板幾何での直線のことを意味するものとします。平面図形としての直線はかっこをつけずにあらわします。（かっこが「あるもの」と「ないもの」の差に注意してください。円板星人の「直線」には平面星人には円に見えています。）実は円板幾何学でも次の定理が成り立ちます。

定理 2. (1) 「直線」とは円の単位円内にある一部であって単位円に直交するものといってもよい。
(2) 二つの点を通る「直線」がただ一つ存在する。

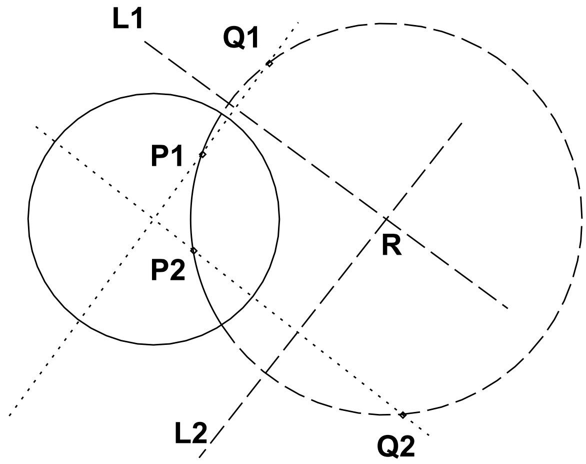
　(1) については等角変換の性質から「直線」が円と単位円の内部の共通部分で表される図形で単位円と直交することはわかりますが、逆に単位円と直交する円の単位円の内部の部分は (1) または (2) の変換で半径にうつることが証明できます。

　(2) について、二つの点を通る「直線」を引いてみることを考えてみましょう。

問題 1. この性質を用いて 2 点を結ぶ「直線」の作図をしてみましょう。

　ヒント：下の図において、P_1 を通る「直線」は必ず Q_1 も通ります。したがってその「直線」を表している円の中心は P_1 と Q_1 の垂直 2 等分線上にあります。

[1]通常は双曲幾何学と呼ばれています。



5. 与えられた角度をもつ三角形

5.1. 三角形の性質と作図. 円板幾何での「直線」は平面幾何での直線と似ている性質があることを見てきましたが、３つの「直線」で囲まれる図形である、「三角形」について考えてみましょう。平面星人の目でみると、円板星人の「三角形」は３つの円で囲まれた図形に見えています。円板幾何学の三角形は、平面幾何ではみられない、不思議な性質があります。　その最たるものは、次の定理です。角度は弧度法であらわすものとします。

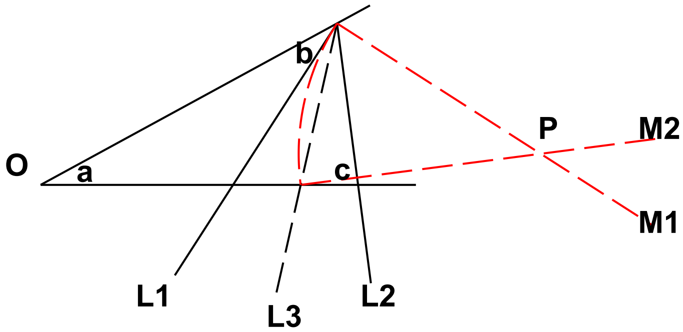
定理 3. (1) 「三角形」の内角の和は π より小さい。
(2) ３つの正の数 a, b, c で $a + b + c < \pi$ とすると a, b, c を角度にもつ「三角形」が作れる。しかもこの「三角形」はすべて合同となる。

二つ目の命題は角度が同じというだけで合同になってしまう、というびっくり仰天の性質です。ご存じのように、平面図形では３つの角度が同じ三角形であっても、合同とはいえないですよね。三角形の合同条件に「三角相等」というのはありませんでした。相似であることはもちろん言えますが。また、３つの数を和が π より小さいものとして与えるとそのその角をもつ「三角形」がつくれてしまう、つまり「三角形」の内角の和に自由度があるということです。

問題 2. それでは与えられた３つの角をもつ「三角形」の作図をしてみましょう。

ヒント：下の図において、L_1 と M_1,L_2 と M_2 は直交しています。単位円にあたる円の半径はどうやって作図すればよいでしょうか？

与えられた角をもつ三角形



5.2. **「三角形」で円板を埋め尽くす.** さて平面の場合と同様に三角形を折り返して円板を埋め尽くすことを考えてみましょう。今度は内角の和の条件はかなりゆるくなり、内角の和が π より小さければよいわけですから、$2\ell, 2m, 2n$ をそれぞれの頂点にあつまる三角形の数とすると、

$$\frac{2\pi}{2\ell} + \frac{2\pi}{2m} + \frac{2\pi}{2n} < \pi$$

という条件さえ満たせばよいことになります。こうすると三角形はつくることはできますが、実際これを折り返して、円板を埋め尽くすことはできるでしょうか。

実はこれは可能で次のことがなりたちます。

単位円板の折り返しで三角形を埋め尽くす条件

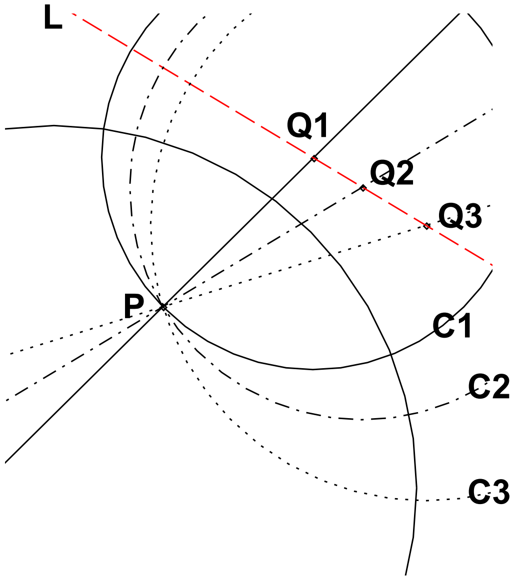
平面上において折り返しを用いて三角形を埋め尽くすための条件は

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

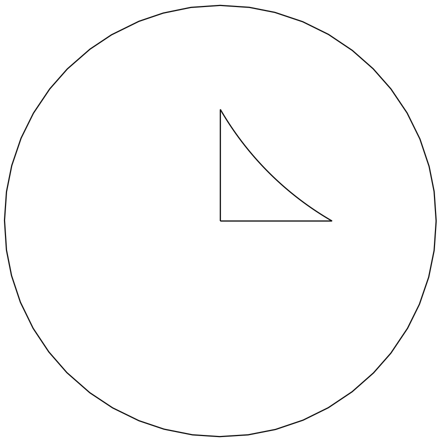
である。ただし $2\ell, 2m, 2n$ はそれぞれの頂点にあつまる三角形の数である。

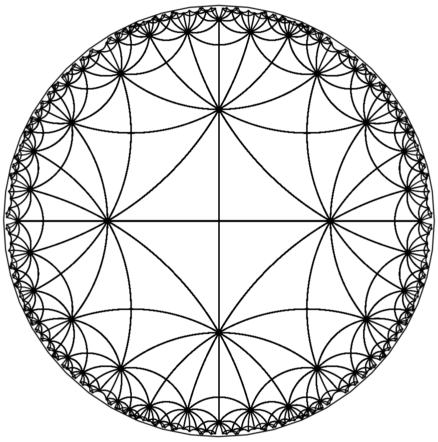
与えられた 3 角をもつ「三角形」が前の節で、作れることがわかりましたから、次に「三角形」を「辺」で「折り返す」作図を考えてみましょう。そのためには次の作図できればよいことになります。

問題 3. 二つの「直線」C_1, C_2 が一つの点 p で交わっているとする。このとき C_1 を C_2 について折り返した「直線」を作図せよ。



下の折り返しは 30°, 30°, 90° を３角にもつ「三角形」の折り返しの様子を書いたものである。上は基本となる三角形、下はそれらを折り返したものである。





References

[コクセター] H.S.M. コクセター著（銀林浩訳）『幾何学入門（上）』（ちくま書店）（ちくま学術文庫）