高校生のための現代数学講座 東京大学
「複素数の幾何学」 玉原国際セミナーハウス
講義 (2) 加藤 晃史 2014 年 7 月 19 日

「反転、円円対応、一次分数変換」

1. 一次分数変換

今までは多項式で表される写像について調べてきたが、以下では多項式の比で表される写像を調べよう。a, b, c, d を複素数とし、

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

の形で表される写像を考える。$a : b = c : d$ すなわち $ad - bc = 0$ のときは、分母分子が約分されて $w =$ 定数となってしまうので、以下では $ad - bc \neq 0$ と仮定する。このとき、(1) を一次分数変換 (メビウス変換) という。その幾何学的な性質を調べよう。目標は次の事実である。

> 一次分数変換は、複素平面内の円や直線を、円や直線に写す。 (☆)

1.1. 相似変換・回転.

$b = c = 0$ の場合、(1) は

$$z \mapsto w = \frac{a}{d} z \tag{2}$$

となり、複素数 $\frac{a}{d}$ 倍の変換 (相似変換・回転) を表す。この場合は確かに (☆) が成り立っている。

1.2. 平行移動.

$c = 0$ かつ $a = d \neq 0$ のとき、(1) は

$$z \mapsto w = z + \frac{b}{d} \tag{3}$$

となる。これは $\frac{b}{d}$ の平行移動であるから、この場合も確かに (☆) が成り立っている。

1.3. 反転.

$a = d = 0, b = c$ のとき、一次分数変換 (1) は

$$z \mapsto w = \frac{1}{z} \tag{4}$$

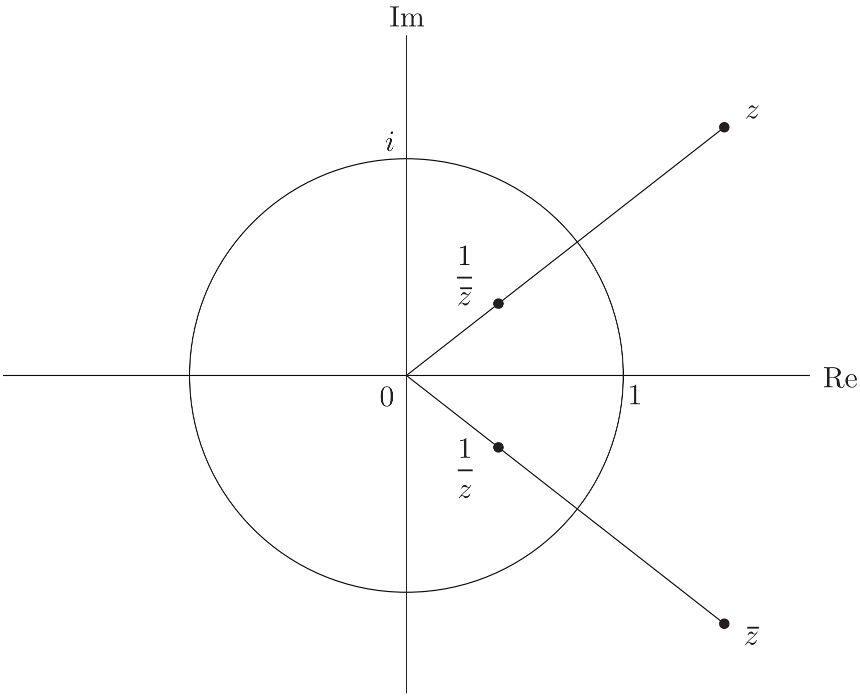
となる。これは、原点を中心とする半径 1 の円 $S : |z| = 1$ に関する鏡映

$$z \mapsto \frac{1}{\overline{z}} \qquad re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{r} e^{i\theta}$$

と、複素共役 (実軸に関する鏡映)

$$z \mapsto \overline{z} \qquad re^{i\theta} \mapsto re^{-i\theta} \tag{5}$$

を合成したものと考えると、幾何学的意味がわかりやすい。



反転 (4) のもとで、円 $C_z : |z-\alpha| = r$ がどのような図形に写されるかを調べよう。関係 $z = 1/w$ を用いると

$$\begin{aligned}|z-\alpha| = r &\iff (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2\\ &\iff z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0\\ &\iff \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} - \alpha\frac{1}{\overline{w}} - \overline{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0\\ &\iff (\alpha\overline{\alpha} - r^2)w\overline{w} - \alpha w - \overline{\alpha}\overline{w} + 1 = 0 \qquad (6)\end{aligned}$$

を得る。

$\alpha\overline{\alpha} - r^2 \neq 0$, つまり C_z が原点を通らないときは、(6) の両辺を $\alpha\overline{\alpha} - r^2$ で割って

$$w\overline{w} - \frac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}w - \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}\overline{w} + \frac{\alpha\overline{\alpha}-r^2}{(\alpha\overline{\alpha}-r^2)^2} = 0$$

$$(7) \qquad \therefore \quad \left(w - \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}\right) = \left(\frac{r}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}\right)^2$$

を得る。これより、C_z の像 C_w は、中心 $\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}$、半径 $\dfrac{r}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}$ の円であることがわかる。

一方、$\alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ のときは、(6) は

$$(8) \qquad \alpha w + \overline{\alpha}\overline{w} = 1$$

となり、これは直線を表す。

「直線」を「無限遠点を通る半径が無限大の円」と考えると便利である。すると、「反転 $z \mapsto 1/z$ は複素平面内の円を円に写す。」と言うことができる。以下、円と言えば直線も含むことにしよう。

1.4. 一般の一次分数変換. 一般の一次分数変換は、$ad - bc \neq 0$ をみたす複素数 a, b, c, d を用いて (1) で与えられた。$c = 0$ のときは

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

は相似変換・回転と平行移動の合成なので、円を円に写すことは明らかである。また、$c \neq 0$ のとき

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} = \left(\frac{bc-ad}{c}\left(\frac{1}{((cz)+d)}\right)\right) + \frac{a}{c}$$

が成り立つので、一般の一次変換 (1) は

$$\begin{aligned}
z &\mapsto z' = cz & &\text{相似変換・回転} \\
z' &\mapsto z'' = z' + d & &\text{平行移動} \\
z'' &\mapsto z''' = \frac{1}{z''} & &\text{反転} \\
z''' &\mapsto z'''' = \frac{bc-ad}{c} z''' & &\text{相似変換・回転} \\
z'''' &\mapsto w = z'''' + \frac{a}{c} & &\text{平行移動}
\end{aligned}$$

という合成で表される。分解して得られた個々の写像は円を円に写すから、全体としても円を円に写すことがわかる。

1.5. 一次分数変換と行列. 2 つの一次分数変換

$$z \mapsto w = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad w \mapsto v = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2} \tag{9}$$

の合成 $z \mapsto v$ を考えよう。すると

$$\begin{aligned}
v = \frac{a_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2} &= \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}
\end{aligned}$$

と表されるので、一次分数変換 2 つの合成は再び一次分数変換となることがわかる。

一次分数変換に、2×2 行列を対応させてみよう：

$$\begin{aligned}
z \mapsto w = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} & \qquad \longleftrightarrow \qquad & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \\
w \mapsto v = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2} & \qquad \longleftrightarrow \qquad & \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すると、合成写像には行列の積が対応することがわかる：

$$\begin{aligned}
z \mapsto v &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} \\
\longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また、逆写像には「ほぼ」逆行列が対応する：

$$
\begin{aligned}
& w = \frac{az+b}{cz+d} && \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow (cz+d)w = (az+b) && \\
& \Longleftrightarrow z(cw-a) - b + dw = 0 && \\
& \Longleftrightarrow z = \frac{dw-b}{-cw+a} && \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$