高校生のための現代数学講座　東京大学
「複素数の幾何学」　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　河澄　響矢　2014 年 7 月 19 日

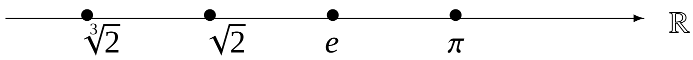
「代数学の基本定理」

代数学の基本定理. 複素数に係数をもつ n 次方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

（$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は与えられた複素数）は必ず複素数の解 z_0 をもつ。つまり、${z_0}^n + a_1 {z_0}^{n-1} + a_2 {z_0}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0$ をみたす複素数 z_0 がとれる。

　この時間の目標は、この定理がなりたつ「仕掛け」を理解することである。方法はいろいろあるが、ここではトポロジーによる方法を解説する。
　まず、「代数学の基本定理」は「実数の連続性」（実数が数直線上にビッシリ詰まっていること）



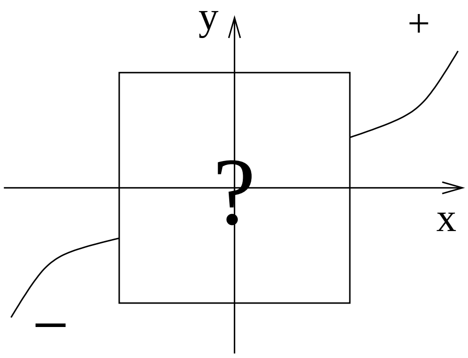
を基礎としたトポロジーまたは複素解析学の定理であるということを注意する。
　「実数の連続性」（実数が数直線上にビッシリ詰まっていること）と方程式の解の存在が関係している簡単な例としては、次の定理がある。

定理. 実数に係数をもつ 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

（a, b, c は与えられた実数）は必ず実数の解 x_0 をもつ。

　証明のあらすじは次の通りである。x を正の方向に大きくすると、$x^3 + ax^2 + bx + c$ は、いつかは正になる。また、x を負の方向に大きくすると、$x^3 + ax^2 + bx + c$ は、いつかは負になる。



そうすると、その間のどこかで x 軸を横切る点があるはずで（「中間値の定理」。ここで実数がビッシリ詰まっていることを使った。）、それが解である。解の存在が示された。

注意 1. (1) 解の具体的な数値が求まらなくても、解が存在することは証明できた。

(2) 有理数だけを考えていてはこの議論はなりたたない。たとえば $x^3 - 2 = 0$ の実数解は、ただ一つ $\sqrt[3]{2}$ にあるが、これは有理数ではない。（$\sqrt{2}$ が有理数でないことと同様にして証明できる。）有理数は $\sqrt[3]{2}$ に穴が空いている。ビッシリ詰まっていないのである。

同様の議論を複素数で実行したい。実数の場合、多項式のグラフは 2 次元の中の 1 次元だから、ノート（2 次元）に書くことができる。しかし、複素数の場合は、多項式のグラフは 4 次元の中の 2 次元だから、ノート（2 次元）に書くことはできない。そこで工夫が必要である。実数の場合、いまの定理では、区間の両端での多項式の振る舞いをしらべて、区間の内部に解があることを証明した。複素数の場合には区間の代わりに円板を考える。円板の境界の円周での多項式の振る舞いをしらべて、円板の内部に解があることを証明するのである。

そういうわけで、多項式 $f(z)$ の円周での振る舞いを調べることにしよう。

最初の例は、

$$f(z) = z^2 + 1$$

である。（先週の講義の知識を使うと、$z^2 + 1 = 0$ の解は i と $-i$ にあることはすぐわかる。）原点を中心とし、半径 $r(> 0)$ の円周

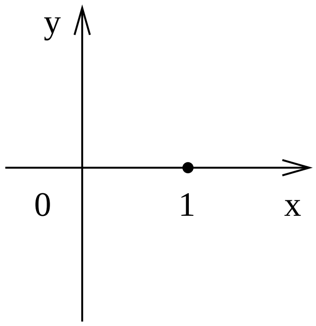
$$r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

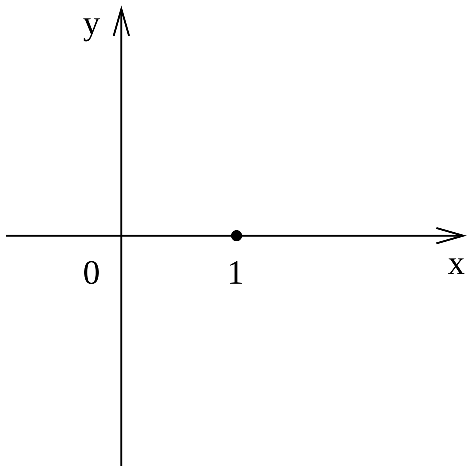
の上での $f(z) = z^2+1$ の振る舞いをしらべよう。そのために $f(z)$ に $z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を代入して、θ を 0 から 2π まで動かしてえられる閉路

$$f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 + 1 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 1$$

を考えよう。(i) $r < 1$ の場合と (ii) $r > 1$ の場合に θ を 0 から 2π まで動かしたときの閉路の様子を書いてみよう。（$r = 1$ の場合は原点を通るので考えない。）

(i) $r < 1$ の場合。　　　　　　　　　(ii) $r > 1$ の場合。





これらの閉路は原点 0 のまわりを何回転しているだろうか？

(i) の場合。　　　　回転。　　(ii) の場合。　　　　回転。

これらを**閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数**という。方程式 $z^2 + 1 = 0$ の解 $i, -i$ と、閉路 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の囲む円板 $\{|z| \leq r\}$ の関係は以下の通り:

- (i) の場合、円板 $\{|z| \leq r\}$ の中に解はない。
- (ii) の場合、円板 $\{|z| \leq r\}$ の中に解が 2 個ある。

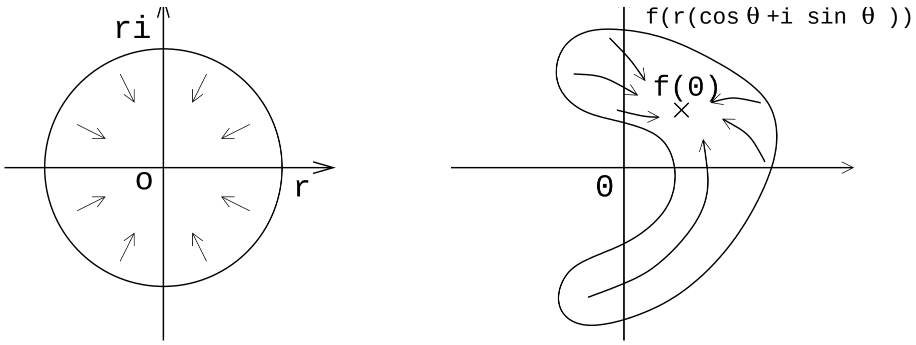
(i) に注目すると、次の観察ができるだろう。

観察 1. 一般の多項式 $f(z)$ についても、円板 $\{|z| \leq r\}$ の中に $f(z) = 0$ の解がなければ、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数は 0 である。

証明. 円板 $\{|z| \leq r\}$ の中に $f(z) = 0$ の解がないと仮定する。このとき、パラメータ $0 \leq s \leq 1$ を使って、閉路を $f(sr(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と変形すると、仮定から変形の途中で原点 0 をまたぐことはない（下図参照）。次の事実は直観的には明らかだろう:

> 閉路を変形する途中で原点 0 をまたぐことがなければ、変形の前後で閉路の原点 0 のまわりの回転数は変わらない。

このことを適用すると、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数は閉路 $f(0(\cos\theta + i\sin\theta)) = f(0)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数、つまり、0 に等しい。 □



θ

注意 2. いまの証明で「直感的には明らか」と言った部分は、数学である以上、厳密に証明する必要がある。そもそも回転数の定義には実数の連続性（実数がビッシリ詰まっていること）が必要である。

観察 1 から次が導かれる。

観察 2. 一般の多項式 $f(z)$ について、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数が 0 でなければ、円板 $\{|z| \le r\}$ の中に $f(z) = 0$ の解が存在する。

証明. もし円板 $\{|z| \le r\}$ の中に $f(z) = 0$ の解が存在しなければ、観察 1 の結果から、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数は 0 となって、仮定に矛盾する。したがって、解は存在する。 □

注意 3. 閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数が m ならば、円板 $\{|z| \le r\}$ の中に $f(z) = 0$ の解は**重複度もこめて** m 個存在する。たとえば $z^3 = 0$ の解は 0 だけだが、重複度は 3 である。

閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ はいつも分かりやすい式で書けるとは限らない。そのような実例を考える。こんどは

$$f(z) = z^3 + 10z^2 + 200z = (z^2 + 10z + 200)z$$

とする。閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数を

(i) $r > 0$ がとても小さい場合。

(ii) $r > 0$ がとても大きい場合。

の 2 つの場合に計算する。

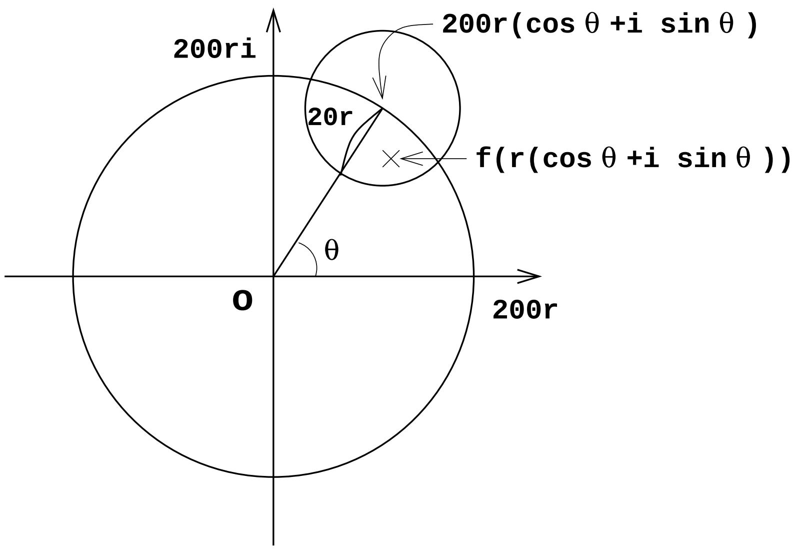
(i) $r > 0$ がとても小さい場合。

$$
\begin{aligned}
& f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) \\
= \quad & 200r(\cos\theta + i\sin\theta)\left(1 + \frac{1}{20}r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{200}r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\right)
\end{aligned}
$$

がなりたつ。ここで $r \leq 1$ ならば（大雑把な計算で）

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{20}r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{200}r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\right| \\
\leq \quad & \frac{1}{20}r|\cos\theta + i\sin\theta| + \frac{1}{200}r^2|\cos 2\theta + i\sin 2\theta| = \frac{1}{20}r + \frac{1}{200}r^2 \leq \frac{1}{20} + \frac{1}{200} \leq \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

となる。（最後の 1/10 は 1 より本当に小さくできさえすれば 99/100 でも 999/1000 でも大丈夫である。）そこで、先週の講義で習った複素数の積の図形的な計算方法を思い出すと、$f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ は $200r(\cos\theta + i\sin\theta)$ から距離 $200r \times \frac{1}{10} = 20r$ 以下のところにある（下図参照）。



そこで、このような r についてパラメータ $0 \leq s \leq 1$ を使って閉路を

$$
200r(\cos\theta + i\sin\theta)\left(1 + s\left[\frac{1}{20}r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{200}r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\right]\right)
$$

のように変形させても、変形の途中で原点 0 をまたぐことはない。区間 $[200r - 20r, 200r + 20r]$ に 0 は含まれていないからである。したがって、$f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ と $200r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の回転数は等しい。つまり 1 である。（このことは、方程式

$z^3 + 10z^2 + 200z = 0$ の解が、原点に 1 つ、原点から離れたところに 2 つあることに対応している。）

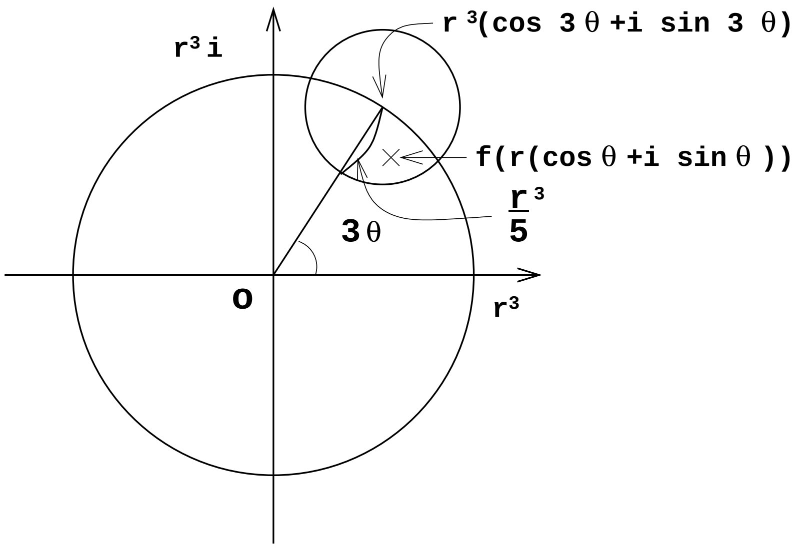
(ii) $r > 0$ がとても大きい場合。

$$\begin{aligned} & f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) \\ = \; & r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)\left(1 + 10\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + 200\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\right) \end{aligned}$$

となる。ここで $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$ および $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-2} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$ を使った。いま $r \geq 100$ とすると

$$\begin{aligned} & \left|10\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + 200\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\right| \\ \leq \; & 10\frac{1}{r}|\cos\theta - i\sin\theta| + 200\frac{1}{r^2}|\cos 2\theta - i\sin 2\theta| = 10\frac{1}{r} + 200\frac{1}{r^2} \leq \frac{10}{100} + \frac{200}{10000} \leq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。（ここでも 1/5 は 1 より本当に小さければよい。）そこで $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ は $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ から距離 $r^3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}r^3$ 以下のところにある（下図参照）。



このような r についてパラメータ $0 \leq s \leq 1$ を使って閉路を

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)\left(1 + s\left[10\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + 200\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\right]\right)$$

のように変形させても、変形の途中で原点 0 をまたぐことはない。区間 $[\frac{4}{5}r^3, \frac{6}{5}r^3]$ に 0 は含まれていないからである。したがって、$f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ と $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ の回転数は等しい。つまり 3 である。

つぎに、多項式 $f(z)$ として

$$f(z) = z^4 + 11z^3 + 60z^2 + 140z + 500$$

を考える。($(z^2+z+10)(z^2+10z+40)+100$ としてデタラメに作ってみた。作り方から分かるように実数解はない。)$r > 0$ がとても大きいとして閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
& f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) \\
= \ & r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)\left(1 + \frac{11}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \cdots + \frac{500}{r^4}(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)\right)
\end{aligned}$$

として、r を調整して

$$\left|11\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \cdots + 500\frac{1}{r^4}(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)\right| \le 11\frac{1}{r} + \cdots + 500\frac{1}{r^4}$$

が 1 より小さくなるようにすればよい。(このあとの計算を各自でやってみよう。)

$r \ge$ 　　　　とすると、

$$\begin{aligned}
& 11\frac{1}{r} + 60\frac{1}{r^2} + 140\frac{1}{r^3} + 500\frac{1}{r^4} \\
\le \ &
\end{aligned}$$

となる。そこで、このような r についてパラメータ $0 \le s \le 1$ を使って閉路を

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)\left(1 + s\left[\frac{11}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \cdots + \frac{500}{r^4}(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)\right]\right)$$

のように変形させても、変形の途中で原点 0 をまたぐことはない。

結論として、$r \geq$ 　　　　のとき、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数が 4 であることがわかる。これに観察 2 を適用すると、4 次方程式 $z^4 + 11z^3 + 60z^2 + 140z + 500 = 0$ に解が存在することがわかる。つまり、我々は

> 方程式の解の具体的な数値は知らないのに、解が存在することは証明できた

のである。これは現代数学の特徴の一つである。

いまの議論を一般の n 次方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

（$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は与えられた複素数）に拡張するのはむずかしくない。$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ として、$r > 0$ がとても大きいときに、閉路 $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の原点 0 のまわりの回転数が n であることを示せばよい。これが示されれば観察 2 により解の存在が証明できる。回転数の計算はプリントの (補足 2) に書いておいた。しかし、この講義のよい復習になるので、プリントの計算を見る前に、（一般の多項式を扱うのはまだ慣れないかもしれないが）自分で考えてみてください。

まとめ

1. 「代数学の基本定理」は「実数の連続性」（実数がビッシリ詰まっていること）を基礎としたトポロジーまたは複素解析学の定理である。

2. ここで扱った証明の要点は次の事実にある:

   > 閉路を変形する途中で原点 0 をまたぐことがなければ、変形の前後で閉路の原点 0 のまわりの回転数は変わらない。

   変形しても変わらないものを考えるのがトポロジーという数学である。

3. 現代数学では

   > 具体的な数値としては求められなくても、存在することは証明できる

   ということがしばしば起こる。

(補足 1) 代数学の基本定理の主張について

代数学の基本定理には少なくとも次の 2 種類の言い方がある。ここでは $n \geq 1$ とする。

代数学の基本定理 (その 1). 複素数に係数をもつ n 次方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

（$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は与えられた複素数）は必ず複素数の解 z_0 をもつ。つまり、

$$z_0{}^n + a_1 z_0{}^{n-1} + a_2 z_0{}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0$$

をみたす複素数 z_0 がとれる。

代数学の基本定理 (その 2). 複素数に係数をもつ n 次多項式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

（$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は与えられた複素数）は必ず n 個の 1 次式の積に因数分解できる。つまり、n 個の複素数 $s_1, \ldots, s_n$ （重複も許す）が存在して

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = (z - s_1)(z - s_2) \cdots (z - s_n)$$

と表わされる。

この講義で紹介するのは (その 1) であるが、(その 1) がわかれば、(その 2) は以下のようにして導かれる。

まず、方程式 $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ に (その 1) を適用すると解がとれる。これを s_1 とする。z を $(z - s_1) + s_1$ に直して展開すると、ある $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ によって次のように表される

$$\begin{aligned}
& z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \\
= \ & ((z - s_1) + s_1)^n + a_1((z - s_1) + s_1)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}((z - s_1) + s_1) + a_n \\
= \ & (z - s_1)^n + b_1(z - s_1)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(z - s_1) \\
& \quad + s_1{}^n + a_1 s_1{}^{n-1} + a_2 s_1{}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s_1 + a_n \\
= \ & (z - s_1)^n + b_1(z - s_1)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(z - s_1) + 0.
\end{aligned}$$

最後の等式は s_1 が解であることによる。そこで $(z - s_1)$ で因数分解すると

$$\begin{aligned}
& z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \\
= \ & (z - s_1)((z - s_1)^{n-1} + b_1(z - s_1)^{n-2} + \cdots + b_{n-1})
\end{aligned}$$

となる。ここで $(z-s_1)^{n-1}+b_1(z-s_1)^{n-2}+\cdots+b_{n-1}=z^{n-1}+c_1z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ と展開しなおすと、結局、

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=(z-s_1)(z^{n-1}+c_1z^{n-2}+\cdots+c_{n-1})$$

となる。

次に、方程式 $z^{n-1}+c_1z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=0$ に (その 1) を適用して解をとり、それを s_2 とする。同じ計算を繰り返すと、ある $e_1,\ldots,e_{n-2}$ によって

$$z^{n-1}+c_1z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=(z-s_2)(z^{n-2}+e_1z^{n-3}+\cdots+e_{n-2})$$

つまり、

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=(z-s_1)(z-s_2)(z^{n-2}+e_1z^{n-3}+\cdots+e_{n-2})$$

となる。これを続けていけば

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)$$

と因数分解できる。以上で (その 2) が (その 1) から導かれた。

なお、(その 2) から (その 1) を導くのは簡単である。$s_1,\ldots,s_n$ のどれかを z_0 にとればよいからである。

(補足 2) 一般の場合の回転数の計算.

$n\geq 1$ とし、一般の n 次多項式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

（$a_1,a_2,\ldots,a_n$ は与えられた複素数）を考える。とても大きい $r>0$ について、閉路

$$f(r(\cos\theta+i\sin\theta)),\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

の原点 0 のまわりの回転数が n であることを計算で証明する。いま、

$$\begin{aligned}
& f(r(\cos\theta+i\sin\theta)) \\
= \;& r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \\
& \times\left(1+\frac{a_1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)+\frac{a_2}{r^2}(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)+\cdots+\frac{a_n}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)\right)
\end{aligned}$$

がなりたつ。ここで等式 $(\cos k\theta - i\sin k\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-k}$ を使っている。いま、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{a_2}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) + \cdots + \frac{a_n}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\right| \\
\leq\ & \frac{|a_1|}{r}|\cos\theta - i\sin\theta| + \frac{|a_2|}{r^2}|\cos 2\theta - i\sin 2\theta| + \cdots + \frac{|a_n|}{r^n}|\cos n\theta - i\sin n\theta| \\
&= \frac{|a_1|}{r} + \frac{|a_2|}{r^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{r^n}
\end{aligned}$$

となる。 $|a_1|, |a_2|, \cdots |a_n|$ の最大値を M とする。また $r \geq 1$ とする。このとき

$$\frac{|a_1|}{r} + \frac{|a_2|}{r^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{r^n} \leq M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) \leq \frac{nM}{r}$$

となる。（かなり大雑把な計算をしてしまった。興味のある人はもっと精密な計算をしてみよう。）そこで $r \geq (10nM$ と 1 の大きい方$)$ については $\frac{nM}{r} \leq \frac{1}{10}$ だから $f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ と $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ の距離は $r^n \times \frac{1}{10}$ 以下である。したがって、このような r についてパラメータ $0 \leq s \leq 1$ を使って、閉路を

$$\begin{aligned}
= \quad & r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
& \times\left(1 + s\left[\frac{a_1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{a_2}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) + \cdots + \frac{a_n}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\right]\right)
\end{aligned}$$

のように変形しても、変形の途中で閉路が原点 0 をまたぐことはない。区間 $[\frac{9}{10}r^n, \frac{11}{10}r^n]$ に 0 は含まれていないからである。したがって $r \geq (10nM$ と 1 の大きい方$)$ のとき、$f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ の原点 0 のまわりの回転数は、$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ の回転数つまり n に等しい。これが示すべきことであった。 $\square$

参考文献

[コスニオフスキ] クゼ・コスニオフスキ著（加藤十吉 編訳）『トポロジー入門』（東京大学出版会）