高校生のための現代数学講座　　　　東京大学
「複素数の幾何学」　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　高山 茂晴　　　　2014 年 7 月 12 日

「三角関数と極形式」

複素数の和, 差 (加法, 減法) は複素平面のベクトルとしての和, 差を用いて図形的に理解できた．積, 商 (乗法, 除法) の図形的な理解は直感的には容易ではなかった．複素数の積 $\alpha\beta$, 逆数 $\dfrac{1}{\alpha}$, 商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$, さらには $\alpha^2, \alpha^3, \sqrt{\alpha}$ らを図形的に理解するには, 三角関数を用いた極形式が役に立つ．(図)

目標： $z = x + yi = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ であり, もう一つの $z' = r'\,(\cos\theta' + i\,\sin\theta')$ に対して,

$$zz' = rr'\,\big(\cos(\theta+\theta') + i\,\sin(\theta+\theta')\big) \text{ となる．}$$

目次：

(a) 一般角と弧度法, ラジアン, 三角関数 (数学 II, 一部 数学 I)
(b) 極形式, 絶対値, 偏角 (数学 III)
(c) 複素数の積と三角関数の加法定理 (積は数学 III, 加法定理は数学 II)
(d) z^n の様子 (数学 III)
(e) 複素数の平方根, 3 乗根 (数学 III)

教科書の関連項目：数学 I: 三角比. 数学 II: 三角関数. 数学 III: 複素数平面, 式と曲線 (極座標).

(a) 一般角と弧度法, ラジアン, 三角関数

角度の単位

度数法: $45°, 90°, 180°, 360°$ (度)

弧度法: 半径 1 の円を考える．$\angle$AOB が切り取る円弧の長さが 1 のとき $\angle$AOB の大きさを **1 ラジアン**といい，これを単位として角の大きさを測る方法を**弧度法**という．(図)

一周分の角度 $360° = 2\pi$ ラジアン

半周分の角度 $180° = \pi$ ラジアン

直角 $90° = \dfrac{\pi}{2}$ ラジアン

一周分, 半周分, 直角に対する割り合いを考えている.

1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} \fallingdotseq 57.3°$ だが, 1 ラジアン, 2 ラジアンのようには考えない.

問 a. 度数法を用いて表された以下の角度を弧度法を用いて表してみよう.

(1) $45° = \dfrac{\pi}{4}$ ラジアン．$90° = \dfrac{\pi}{2}$ ラジアンの $\dfrac{1}{2}$ だから.

$45°$ を書くときには $90°$ の $\dfrac{1}{2}$ を書いている．対応する円弧の長さは考えていない.

(2) $30°$

(3) $60°$

三角関数：$\cos\theta$ 余弦関数, $\sin\theta$ 正弦関数

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}(= 90°)$, または $\leqq \pi(= 180°)$ のとき.

図の直角三角形において $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$. (図)

$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

(2) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき.

$\dfrac{2}{3}\pi = 120°$ のとき $\cos\theta$, $\sin\theta$ を求めてみよう.

(3) $\theta > 2\pi$ のとき.

$\dfrac{9}{4}\pi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) $\theta < 0$ のとき.

$-\dfrac{\pi}{6} = -30°$. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

$-\dfrac{\pi}{6} = -30°$ は, x 軸の $x > 0$ の部分から時計回りに $\dfrac{\pi}{6} = 30°$ と考える.

(b) 極形式, 絶対値, 偏角

(0 でない) 複素数 $z = x + yi$ が表す点を P とする．(図)

O からの距離を $r = |\mathrm{OP}|$,

x 軸 (の $x > 0$ の部分) から反時計回りの角度を θ とする．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

となる．よって $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,

$$(\sharp) \qquad z = x + yi = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．これを複素数 z の**極形式**という．

$r = |\mathrm{OP}|$ を z の**大きさ**, または**絶対値**といい, $|z|$ で表わす．

角度 θ を z の**偏角**といい, $\arg z$ で表わす．偏角: argument．角度: angle.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arg z.$$

(注意: x 軸から時計回りに $\dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$ は, x 軸から反時計回りに $-\dfrac{\pi}{6} = -30^\circ$ と考える.)

問 b. 次の複素数を極形式で表してみよう．作図により求めてもよい．

(1) $z = 1 + i.$ $\quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \theta = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4},\ z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

(2) $z = \sqrt{3} + i.$

(3) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ $\quad |z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ,\ z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}.$

(4) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ $\quad |z| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1,\ \theta = \dfrac{2}{3}\pi = 120^\circ,\ z = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi.$

(5) $z = \sqrt{3} - i.$ $\quad |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,\ \theta = -\dfrac{\pi}{6},\ z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right).$

共役な複素数 $\overline{z}$ の極形式. (図)

$z = x + yi = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき,

$\overline{z} = x - yi = r\,(\cos\theta - i\sin\theta) = r\,\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big).$

問 b の (2) $z = \sqrt{3} + i$ と (5) $z = \sqrt{3} - i$ は互いに共役な複素数である．

(c) 複素数の積と三角関数の加法定理

複素数の積. 二つの複素数 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ に対して

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (y_1 x_2 + x_1 y_2)\, i$$

であった. これを極形式を用いて表してみる.

$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とすると, 上式は

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \big)$$

となる. ここで次の**三角関数の加法定理**を用いる:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

すると, 積 $z_1 z_2$ の極形式は

$$(*) \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \big)$$

となる. 従って

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

となり, **複素数の積は, 絶対値** $r = |z|$ **の積と偏角** $\theta = \arg z$ **の和に対応する**ことが分かる.

問 c. (1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ のとき. $z^2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i.$

(2) $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき.

$z_1 =$ 問 b(2) の z, $z_2 =$ 問 b(3) の z の 2 倍. $\quad z_1 z_2 = 2^2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 4i.$

(3) $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ だから, iz は z を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点 (複素数) を表わす.

三角関数の加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ の証明.

$\mathrm{P} = (1,0), \mathrm{Q} = \big(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)\big)$ とすると (図),

$|\mathrm{PQ}|^2 = (\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2$

$\quad = 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)$

$\quad = 2 - 2\cos(\alpha+\beta).$

一方 $\mathrm{A} = (\cos\alpha, -\sin\alpha), \mathrm{B} = (\cos\beta, \sin\beta)$ とすると (図),

$|\mathrm{AB}|^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - (-\sin\alpha))^2$

$\quad = \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha$

$\quad = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$

$|\mathrm{PQ}| = |\mathrm{AB}|$ より $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ をえる.

(d) z^n の様子

大きさ $|z|=1$ の複素数 $z=\cos\theta+i\,\sin\theta$ に対して,
(c) の積の公式 $z_1z_2=r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$ より,

$$z^2=\cos 2\theta+i\,\sin 2\theta,$$
$$z^3=\cos 3\theta+i\,\sin 3\theta,$$
$$\cdots$$
$$z^n=\cos n\theta+i\,\sin n\theta$$

をえる (図). つまり

$$(\flat)\qquad (\cos\theta+i\,\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\,\sin n\theta$$

が成り立つ. これを**ド・モアブルの定理**という. 一般の $z=r\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)$ に対しては

$$(\flat)\qquad z^n=r^n\big(\cos n\theta+i\,\sin n\theta\big)$$

となる. (簡単のため, 上では n は自然数としてあるが, n は整数としても成立する.)

問 d. (1) $z=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\ z^2=(-1)\times(-1)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1.$
(2) $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ (問 b(4)) に対し,

$$\omega^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\overline{\omega},\quad \omega^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1.$$

(3) 問 b(3) の極形式を利用して $(1+\sqrt{3}i)^6$ を求めてみよう.

(e) 複素数の平方根, 3 乗根

与えられて複素数 α に対して, $z^2=\alpha$ となる複素数 z を α の**平方根**という. 2 次方程式 $z^2=\alpha$ の一つの (複素数) 解を z_1 とすれば, $z^2=\alpha=z_1^2$ より $(z/z_1)^2=1,\ z/z_1=\pm1$ をえる. よって $z=\pm z_1$ がすべての解になる.

$\alpha=r(\cos\theta+i\,\sin\theta)$ のとき, $z_1=\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\,\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ は $z_1^2=r\left(\cos 2\,\dfrac{\theta}{2}+i\,\sin 2\,\dfrac{\theta}{2}\right)=\alpha$ をみたす. この z_1 を $\sqrt{\alpha}$ と書くことに約束すると, 他の解は $-\sqrt{\alpha}$ になる.

$z^3=\alpha$ となる複素数 z を α の **3 乗根**という. 3 次方程式 $z^3=\alpha$ の一つの解を z_1 とすれば, $z^3=\alpha=z_1^3$ より $(z/z_1)^3=1,\ z/z_1=1,\omega,\omega^2$ をえる. ここで $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (問 d(2)) である. よって $z=z_1,\omega z_1,\omega^2z_1$ がすべての解になる. $z_1=\sqrt[3]{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}+i\,\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$ と取れる.

問 e. 次の方程式の解を求めてみよう. 作図により求めてもよい.
(1) $z^2=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ の解は, $z=\pm\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right).$
(2) $z^2=\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$　　(3) $z^3=i.$

(f) 補足と発展 (自習用)

複素数の逆数, 商. (c) の補足.

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ であった. $\overline{z} = r(\cos\theta - i\,\sin\theta), |z| = r$ より

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{r(\cos\theta - i\,\sin\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta))$ が成り立つ.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big)$$

となる. 従って

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

つまり, **複素数の商は, 絶対値** $r = |z|$ **の商と偏角** $\theta = \arg z$ **の差に対応する**.

発展：複素数係数の二次方程式の解の公式. (e) の補足.

複素数 $a(\neq 0), b, c$ を係数とする 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解の公式を与えよう. a, b, c が実数のときと同じ式変形により $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ を解けばよい. これは (e) より $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と解ける. 従って, 公式

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

をえる. ただし, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ は (e) で説明した複素数である.

発展：1 の n 乗根. (d), (e) の補足.

(d) のド・モアブルの定理 (♭) より, 特に $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ である. また $\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ として, 複素数平面上の n 点 $\omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}, \omega_n^n = 1$ (ただし $n \geqq 3$ とする) は正 n 角形の頂点をなすことが分かる. 図に書いてみよう.

複素数 α に対して, $z^n = \alpha$ となる複素数 z を α の n **乗根**という. (e) での $n = 2, 3$ の場合の考察により, n 次方程式 $z^n = 1$ の解を求めることが基本的である. 与えられた自然数 n に対し,

$$\cos n\theta' = \cos n\theta \text{ かつ } \sin n\theta' = \sin n\theta \Leftrightarrow n\theta' = n\theta + 2\pi k \ (k \text{ は任意整数}) \ \Leftrightarrow \theta' = \theta + \frac{2\pi k}{n}$$

であることに注意すると, $z^n = 1$ の解は上述の $\omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}, \omega_n^n = 1$ の n 個に限ることが分かる.

参考：オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$. 例 $e^{\pi i} = -1$.