2014年 高校生のための現代数学講座
「複素数の幾何学」２時間目

複素平面

— 複素数の演算とコンパスと定規による作図 ——

平地健吾

複素数 $z = x + i\,y$ を平面上の点 (x, y) で表したものを複素平面とよぶ．複素平面上では複素数の和，差，積，商および平方根は定規とコンパスを用いて作図することができる．この講義ではその方法を実習する．

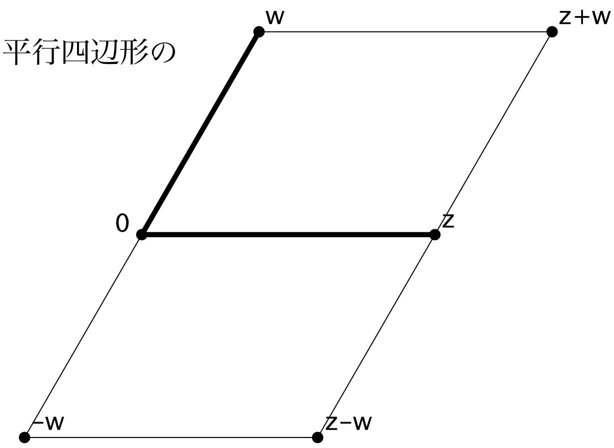
新しい言葉： 複素数 $z = x + i\,y$ にたいして z を実部，y を虚部とよぶ．
x 軸を実軸，y 軸を虚軸とよぶ．
線分$0z$ の長さを$|z|$と書き z の絶対値とよぶ．

1. 複素数の和と差

足し算：z と w の和は線分$0z$ と線分$0w$ を2辺とする平行四辺形の4つめの頂点である．

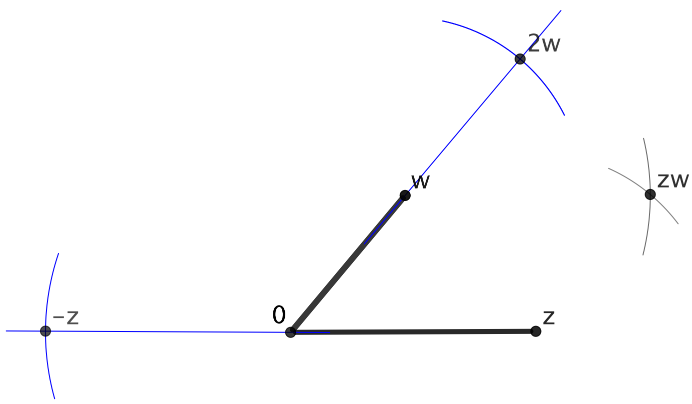
マイナス符号をつける：
$-z$ は z を原点0に対して反転させた点．

引き算：$z - w = z + (-w)$ と見れば上の二つの操作で作図できる．

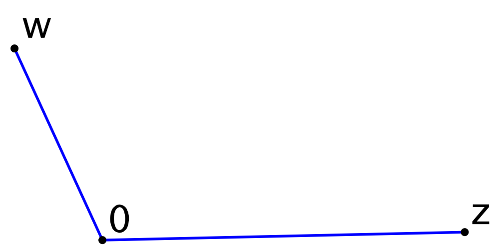


コンパスと定規での作図の例: $z + w$, $-z$, $2w$,

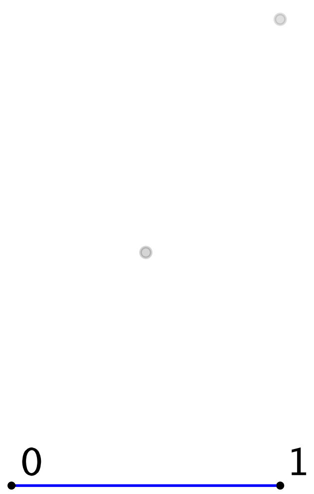
・z を中心とする半径$|w|$の円と w を中心とする半径$|z|$の円の交点が $z + w$.
・w を中心とする半径$|w|$の円と線分$0w$ を延ばした半直線の交点が $2w$.
・原点中心の半径$|z|$の円と線分$z0$ を延ばした半直線の交点が $-z$.



演習1　与えられた z, w に対して z + w, w − z, 2w − z, z − 2w を作図せよ.



演習2（次頁の説明の後で解く）$1+\sqrt{3}i$ と $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を作図せよ.



2. 定規とコンパスによる作図

定規とコンパスによる作図では次の操作のみが許されるとする：

A. 与えられた2点を通る直線を引く.

B. 与えられた線分を半径とする円を描く.

C. 二つの直線および円の交点を求める.

＊定規の目盛を使って作図をしてはいけない. 分度器も使用禁止.

作図の例

垂線を引く

与えられた直線Lと点Pに対してPを通るLの垂線を引く.

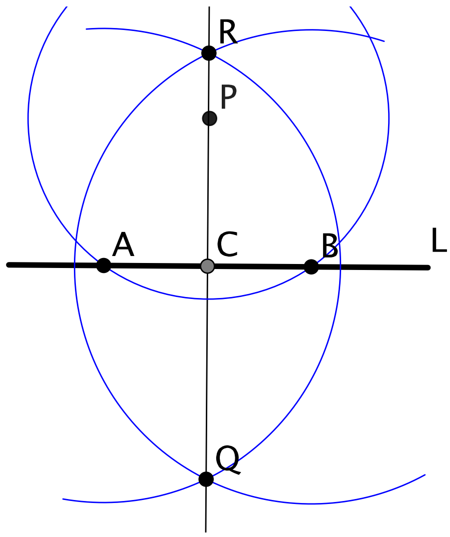
(1) Pを中心とするLと2点で交わる円を描く. 交点をA, Bとする.

(2) Aを中心とする大きめの半径の円を描く.

(3) Bを中心とする(2)と同じ半径の円を描く.

(4) 上の二つの円の交点をQ, Rとする.

(5) 線分QRがLの垂線.



線分の中点を求める

線分ABに対して上の(2), (3), (4), (5)を行う.

線分QRとLの交点CがABの中点.

正の実数の平方根を求める

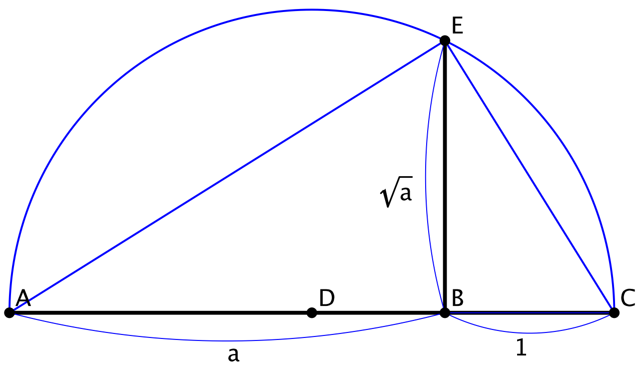
実数 $a > 0$ に対して $\sqrt{a}$ を作図する.

(1) 直線上の３点A, B, CをAB = a, BC = 1
となるようにとる.

(2) 線分ACの中点をDをとり, D中心の
半径ADの円を描く.

(3) Bを通る線分ACの垂線と上の円の交点を
Eとする.

(4) このときBE = $\sqrt{a}$.



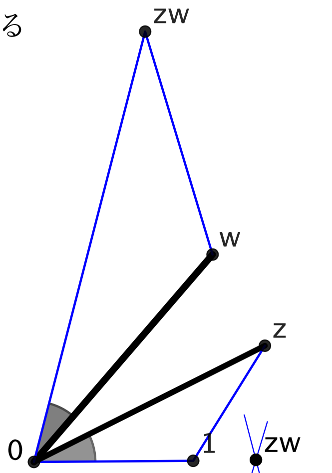
説明：△ABEと△EBCは相似なので a : BE = BE : 1. よって BE^2 = a.

演習2（前のページに作図する）$1+\sqrt{3}i$ と $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を作図せよ.

ヒント：例えば0を中心, 半径2の半円を描く, 1での実軸の垂線を引くと交点が$1+\sqrt{3}i$

3. 複素数の積

zとwの積zwは三角形△01z が△0w(zw) が相似になるような点である（この事実は次の講義で説明する）.



すぐに分かる大事な性質：

(a) △01z と△0w(zw)の拡大比は|w|なので|zw| = |z|×|w|

(b) 相似変換は角度を保つので原点での角は

等式 ∠10(zw) = ∠10z + ∠10w をみたす.

角∠10z を z の偏角とよぶ. この二つの性質で積 zw が決まる.

積の作図（合同な三角形の作図）

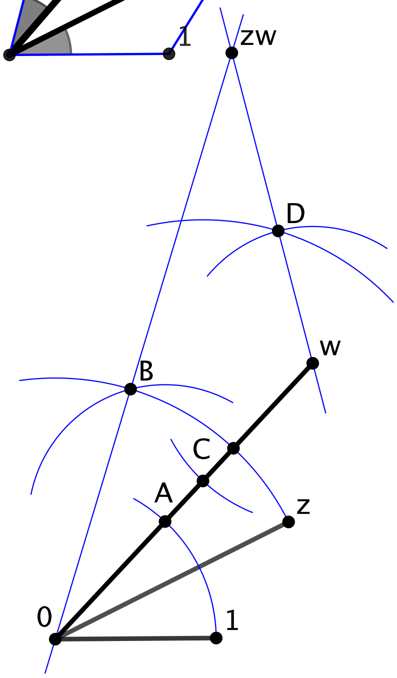
(1) 0を中心とする半径|z|の円と線分0w の交点を A とする.

(2) Aを中心とする半径|z − 1|の円と0を中心とする半径|z|の円の交点をBとする.

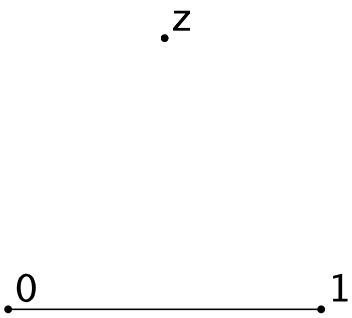
(3) wを中心とする半径1の円と線分0wの交点をCとする.

(4) Cを中心とする変形|z|の円とwを中心とする半径|z − 1|の円の交点をDとする.

(5) 0とBを通る直線とwとDを通る直線の交点がzwである.



演習3 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ に対して z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 を作図せよ.



4. 複素数の割り算

z/w = z (1/w) が成り立つので逆数 1/z の作図方法が分かればよい.

複素数の積にたいする絶対値と角度の関係を見ると

(a) $|1/z| = 1/|z|$

(b) $\angle 10z + \angle 10(1/z) = 0$

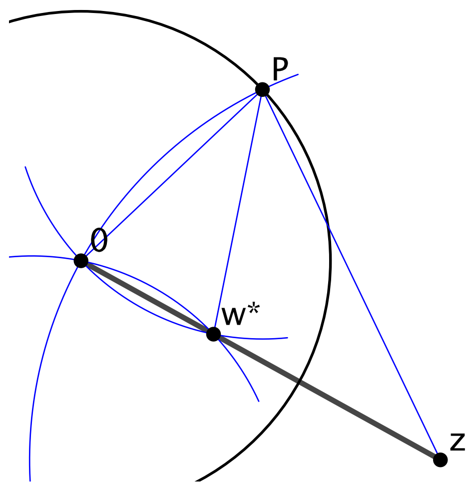
がわかる. この二つの等式を満たす点は次のような操作で作図できる.

(a) 線分0z 上の点w で $|z||w| = 1$ を満たす点をとる(w を z の単位円についての反転とよぶ).

(b) wの実軸に関する反転が 1/z

実軸に関する反転は垂線を使って簡単に作図できるので反転の方を考える.

円についての反転の作図



$|z| > 1$の場合.

(1)　z を中心とする半径|z|の円と単位円の交点の一つをPとする.

(2)　Pを中心とする半径0Pの円と線分0z の交点 w が z の
　　単位円に関する反転である.

説明：二つの二等辺三角形△zP0と△P0w*は相似である.

よって $1 : |w^*| = |z| : 1$. これは $|z||w^*| = 1$を示している.

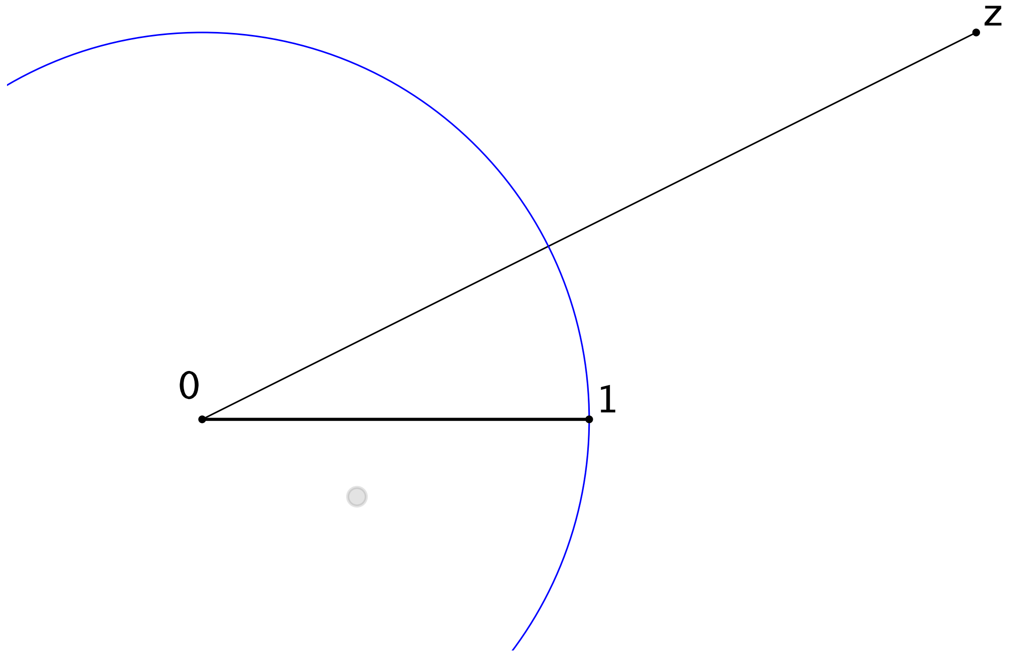
$|z| < 1$の場合

(1)　z を n 倍して w = nz が単位円の外にあるようにする.

(2)　上の手順で w の反転 w* を求める.

(3)　w* の n 倍が z の単位円に関する反転である.

演習4　z = 2+i の逆数 1/z を作図せよ.



5. 複素数の平方根

複素数 z の平方根$\sqrt{z}$は

(a) $\sqrt{|z|} = |\sqrt{z}|$

(b) $\angle 10z = 2\angle 10\sqrt{z}$

を満たす点である．角度の計り方には360度の整数倍の自由度があるので角度を半分にするときには180度の自由度が残る．このため平方根が$\pm\sqrt{z}$の二つある．

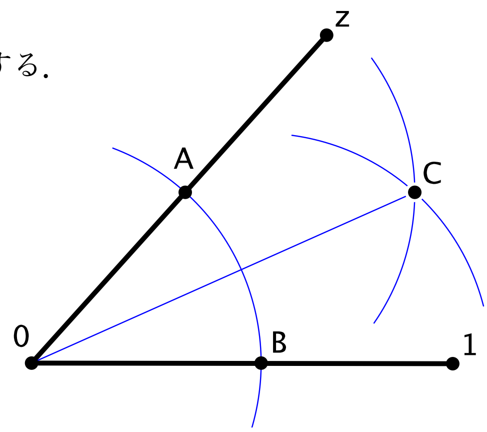
(a)の$\sqrt{|z|}$の作図方法は知っているので，(b)を考える．これは角∠10zの二等分線を引くことに対応する．

角の二等分線の作図

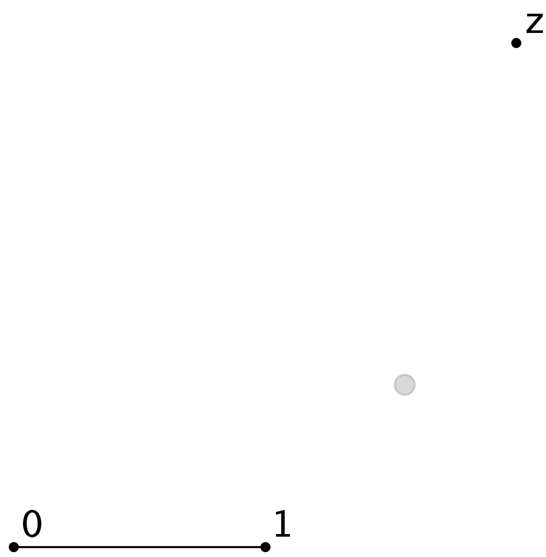
線分0z と線分01 の二等分線を描く．

(1)　原点中心の円を描き上の2線分との交点をA, Bとする．

(2)　A および B を中心とする同じ半径の円を描き，
　　その交点をCとする．線分0C が求める二等分線.



演習5　$\sqrt{2+2i}$ を作図せよ．

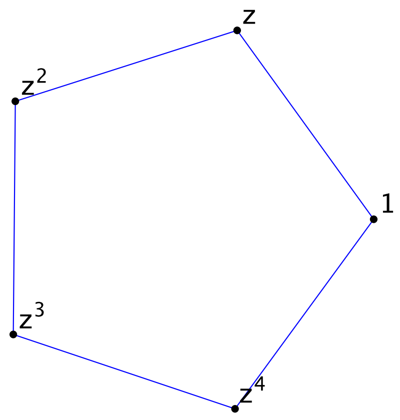


6. 正五角形の作図

複素数の四則演算と平方根はコンパスと定規をもちいて作図できることが分かった．二次方程式の根はこれらの操作で得られるので，方程式の係数が作図可能であれば根も作図可能である．

応用として単位円に内接する正五角形を作図する．

正五角形の頂点は方程式 $z^5=1$ の根として与えることができる．



この方程式を解く．

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

より1以外の根は $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を満たす．

$w=z+\dfrac{1}{z}$ とおけば

$$z^4+z^3+z^2+z+1=z^2(w^2+w-1)$$

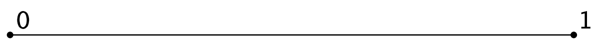
と変形できる． $w^2+w-1=0$ から $w=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ をえる．次に z の二次方程式 $z^2-wz+1=0$ を解けばよい．これで二重根号を含んだ4つの根がえられるがそれらを作図するのは大変そうである．

少し工夫をする．実係数の二次方程式の二根は $z=x\pm y\,i$ の形である．よって解と係数の関係より

$$x=\frac{w}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

をえる．実部が決まれば虚部は単位円との交点として与えられる．

演習6　直線 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ を作図することにより正五角形を描け.



演習６の解答例

(1)　w = 1/2 + i をとる．このとき$|w|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である．

(2)　wを中心とする半径1/2 の円と線分0w の

交点を A とする．$|A|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ である．

(3)　0 を中心とする半径|A|の円と線分01 の

交点を$B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とする．

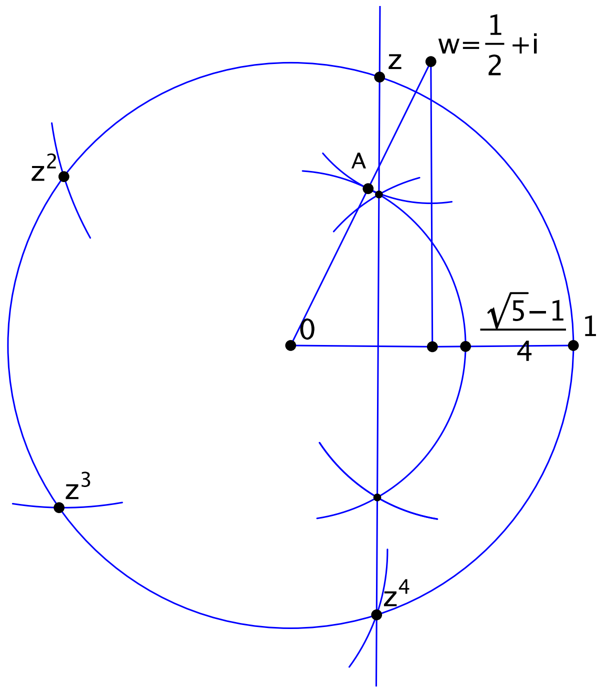
(4)　線分0Bの垂直二等分線と 0 中心の単位円

との交点を z とする．

（0およびBを中心とする二つの単位円の交点を

zをしてもよい．）

(5)　線分1z が正五角形の一辺である．



7. コンパスと定規による作図と二次方程式

複素平面でのコンパスと定規による作図と演算が対応していることを見た．この対応から次のような点と複素数の対応が分かる：

「二つの点0と1が与えられたときコンパスと定規によって作図できる点」

「複素数1から四則演算と根号をとることを繰り返すことによってえられる数」

この翻訳を用いるとギリシャの3つの作図問題の解が不可能であることが容易に証明できる：

A. 正七角形を作図する

B. 体積2の立方体の一辺を作図する

C. 60度を三等分して20度を作図する

順に次の方程式が四則演算と根号の繰り返しでは解けないことが証明のポイントとなる：

A. $z^7=1$,

B. $z^3=2$

C. $4z^3-3z-1/2=0$ (これは$z=\cos 20^\circ$ のみたす方程式)

詳しい証明が知りたい人は

R. クーラント，H. ロビンズ著「数学とは何か」 岩波書店 2001 (初版は1941)

第三章「作図法：数体の代数」を参照．