高校生のための現代数学講座　　東京大学
「複素数の幾何学」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　足助 太郎　　2014 年 7 月 12 日

「二次方程式を解く — 複素数とその算法 —」

1.　自然数・整数・有理数

次のような記号を用いる．

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{\ \text{自然数全体}\ \} = \{1, 2, \ldots\},\\
\mathbb{Z} &= \{\ \text{整数全体}\ \} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},\\
\mathbb{Q} &= \{\ \text{有理数全体}\ \} = \left\{ \frac{q}{p} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ p \neq 0 \right\},\\
\mathbb{R} &= \{\ \text{実数全体}\ \},\\
\mathbb{C} &= \{\ \text{複素数全体}\ \} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

例えば n が自然数であることを $n \in \mathbb{N}$ と表す．複素数や $\mathbb{C}$ についてはこれから詳しく述べる．複素数以外の数については，例えば「自然数は整数であるが，逆は必ずしも正しくない.」という関係がある．ほかの組，例えば整数と有理数や有理数と実数についても同様の関係がある．実数と複素数についても同様である．

2.　二次方程式と実数・複素数

c を実数とする（$c \in \mathbb{R}$ とする）．$c \geq 0$ であれば c の平方根 $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ が考えられる．これは x に関する方程式

$$x^2 = c \tag{2.1}$$

が二解 $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ を持つということである．より一般に，$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ のとき，x に関する方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

は $b^2 - 4ac \geq 0$（$b^2 - 4ac$ を方程式 (2.2) あるいは 2 次式 $ax^2 + bx + c$ の**判別式**と呼ぶ）のとき，そのときのみ実数の範囲で解を持ち，解は

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる．

$c \geq 0$ であるとか，$b^2 - 4ac \geq 0$ という制限があるが，これを外したい．そのためには少なくとも

$$x^2 = -1$$

が成り立つような数 x を考える必要がある．このような数を i で表し，**虚数単位**と呼ぶ．

$$i^2 = -1$$

である．また，$a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ の形をした数を考え，**複素数**と呼ぶ．a が実数であれば $a+0i$ を考えることにより，a を複素数とみなすことができる．複素数であって，実数ではないものを**虚数**と呼ぶ．$z=a+bi$ のとき $-z=-a-bi$ とする．

定義 2.3. $z=a_1+b_1i,\ w=a_2+b_2i$，但し $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ とする．

1) z と w の**和** $z+w$ を
$$z+w=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
により定める．また，$z-w=z+(-w)$ と定める．

2) z と w の**積** zw を
$$zw=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$
により定める．zw は $z\times w$ と表しても良い．

定義 2.4. $a\geq 0$ とする．虚数単位 i について
$$\sqrt{-a^2}=ai$$
と定める．

a には条件 $a\geq 0$ が付いていることに注意せよ．

複素数の演算は $i^2=-1$ に注意して一次式の計算と同様に行えば良い．例えば
$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)&=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2\\&=a_1a_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+b_1b_2(-1)\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\end{aligned}$$
と計算して良い（最後の式は複素数の積の定義の式（定義 2.3）と一致していることを確かめよ）．

除法（割り算）は，実数の場合を踏まえて次のように定める．

定義 2.5. 1) $z\in\mathbb{C}$ とする．$w\in\mathbb{C}$ が $zw=wz=1$ を満たすとき，w を z の**逆数**と呼び，z^{-1} あるいは $\dfrac{1}{z}$ で表す．

2) $z,w\in\mathbb{C}$ とする．$w\neq 0$ のとき，z の w による**商** $\dfrac{z}{w}\in\mathbb{C}$ を
$$\frac{z}{w}=zw^{-1}$$
により定める．定理 2.3 により $\dfrac{z}{w}=w^{-1}z$ が成り立つ．

複素数 z の逆数について,（実数の場合と類似して）次が成り立つ．

命題 2.6. z を複素数とし，$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ とする．$z\neq 0$ が成り立つとき，そのときのみ z^{-1} が（複素数の範囲で）存在する．また，このとき
$$z^{-1}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$
が成り立つ．

3.　二次方程式の解

複素数に関する四則演算ができるようになったので，2 次方程式を解いてみる．まずは係数は実数とすると，次が成り立つ．証明は授業で述べる．

定理 3.1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$a \neq 0$ とする．複素数 x に関する方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.2}$$

の解について，次が成り立つ．

1) $b^2 - 4ac > 0$ のとき，方程式 (3.2) は二つの解を持つ．実際には解は実数であって，

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる．

2) $b^2 - 4ac = 0$ のとき，方程式 (3.2) は一つの解を持つ（**重解**であるなどと言う）．実際には解は実数であって，

$$-\frac{b}{2a}$$

で与えられる．

3) $b^2 - 4ac < 0$ のとき，方程式 (3.2) は二つの解を持つ．解は

$$\frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$$

で与えられる．解は虚数であって，実数の範囲には存在しない．

三つの場合で見かけがそれぞれ少し異なるが，いずれの場合にも解は同一の式

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる（$b^2 - 4ac = 0$ の場合には一つの数しか表さない）．

複素数を係数とする 2 次方程式についてはどうであろうか．詳しくは後の授業で扱うので，ここでは方程式

$$x^2 = i \tag{3.3}$$

のみについて考える．実数が係数の場合には，判別式が 0 でなければ解が二つ存在する．方程式 (3.3) についても形式的に判別式を計算すれば $0^2 + 4i = 4i$ となり，0 ではない．従ってこれにも解が二つ存在すると期待される．ところで，$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ であるから，

$$\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$$

が成り立つ．同様に $\left(-\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$ も成り立つ．従って，方程式 (3.3) には少なくとも二つの複素数解が存在する．実はこれら以外の解は存在しないことを示すことができる．つまり，方程式 (3.3) は丁度二つの複素数解を持つ．このことを一般化したのが代数学の基本定理である．

4.　問題

第二節に関する問題

問 4.1. 1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$ を求めよ．

2) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ がいつ成り立つか調べよ．

ヒント：a, b の符号で場合分けをすると良い．$a = 0$ あるいは $b = 0$ の場合にも注意せよ．

問 4.2. 1) $z = a_1 + b_1 i,\ w = a_2 + b_2 i,\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ のとき，$z - w$ を $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ.

2) $z, w \in \mathbb{C}$ について $z + w = w + z$ と $zw = wz$ が成り立つことを示せ.

3) $z + 0 = 0 + z = z$ および $1z = z1 = z$ が成り立つことを確かめよ.

4) $z \in \mathbb{C}$ とし，$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ と表す．$\bar{z} = a - bi$ と置き，z の**共役複素数**あるいは単に**共役**と呼ぶ．$z\bar{z}$ を a, b を用いて表し，非負の実数であることを示せ．$\sqrt{z\bar{z}}$ を z の**絶対値**と呼び，$|z|$ で表す.

5) $z \in \mathbb{C}$ とする．$\dfrac{z + \bar{z}}{2},\ \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ をそれぞれ a, b を用いて表し，それぞれ z の実部と虚部に一致することを示せ．特にいずれも実数である.

問 4.3. 1) $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ とする．

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

が成り立つことを示せ.

2) a を 0 でない実数とする．a は $a + 0i$ とみなすことにより複素数である．a の複素数としての逆数は（a を実数とみなして定めた）$\dfrac{1}{a}$ に等しいことを示せ.

問 4.4. z, w を以下のように定めるとき，$z + w, z - w, zw, \dfrac{z}{w}$ を求め，$a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ.

1) $z = 3 + 2i,\ w = 4 - 3i$

2) $z = 1 + i,\ w = 2 - i$

3) （これについては後の授業で詳しく扱うので，解くことにこだわらなくて良い.）

$z = \cos\theta + i\sin\theta,\ w = \cos\varphi + i\sin\varphi$，ただし $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$，とする．必要であれば三角関数の加法公式

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

を用いて良い.

問 4.5 (これについても後の授業で詳しく扱うので，解くことにこだわらなくて良い).

r, θ を実数とし，$r > 0$ とする．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と置く．$n \in \mathbb{Z}$ について z^n を求め，$a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ．必要であれば三角関数の加法公式を用いて良い.

第三節に関する問題

問 4.6. 以下に挙げる 2 次方程式について，

a) 判別式を求めよ．また，解の公式を用いて複素数の範囲で解け．

b) 左辺を平方完成し，それを用いて解き，a) の結果と比較せよ．

1) $x^2 + 4x + 4 = 0$

2) $x^2 + 6x + 13 = 0$

3) $x^2 + 2x + 1 = 0$

4) $x^2 - 2x + a = 0$，ただし $a \in \mathbb{R}$ を定数とする．

参考文献

[1] 複素数の幾何学（数学入門シリーズ３），片山 孝次著，岩波書店，1982.

[2] 複素数と複素数平面，一松 信著，森北出版，1993，2010（POD 版）.

[3] 微分積分読本 －1 変数－，小林 昭七著，裳華房，2000.

[4] 軽装版　解析入門 I，小平 邦彦著，岩波書店，2003.

高校生のための現代数学講座

二次方程式を解く
— 複素数とその算法 —

参考資料

足助 太郎

２０１４年7月１２日*

1. 自然数・整数・有理数

まず簡単にこれまで学んできた数（かず，すう）について復習する．

最も基本的な数は**自然数**，つまり正の整数である．自然数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ で表す．また，n が自然数であることを $n \in \mathbb{N}$ と表し，n は $\mathbb{N}$ の**元**であると言う．なお，$\mathbb{N}$ には 0 を含めることがあるので注意が必要である [†1]．さて，p, q を自然数とし，数 x に関する方程式

$$x + p = q \tag{1.1}$$

を考える．両辺から p を引けば（両辺に $-p$ を加えれば）

$$x = q - p$$

が得られる．$p < q$ であるならば [†2] $x \in \mathbb{N}$ が成り立ち，自然数の範囲で話が済む．しかし，$p \geq q$ とする（記号 $\geq, \leq$ はそれぞれ $\geqq, \leqq$ と同じ意味である）と，自然数同士を加えると必ず値は大きくなるので

$$x + p > p \geq q$$

が成り立つから，$x + p = q$ は x が自然数であると仮定すると解を持たない．これでは不便であるので，**整数**を用いて良いことにすると，方程式 (1.1) は常に

$$x = q - p$$

という解を持つ．ただし，x は一般には自然数ではなく，整数である．整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ で表す．

次に $p, q \in \mathbb{Z},\ p \neq 0$ とし，数 x に関する方程式

$$px = q \tag{1.2}$$

を考える．p が q を割り切る（q が p で割り切れる）のであれば

$$x = \frac{q}{p}$$

---

*２０１５年7月２６日修正

[†1] この授業では自然数には 0 を含めないので，このことは気にしなくて良い．進んだ勉強をするとき，例えば本を参照するなどする際には注意が必要である．

[†2] 自然数に 0 を含めるのであれば $p \leq q$ とする．以下同様の修正が必要になるがいちいち述べない．

が方程式 (1.2) の解である．しかし，仮定「p が q を割り切る」は常に成り立つとは限らない (例えば $p=2,\ q=3$ とすれば良い)．そこで方程式 (1.1) のときと同様に，$p,q \in \mathbb{Z},\ p \neq 0$ であっても「p 倍すると q となる数」として $\dfrac{q}{p}$ を考えて良いことにすれば，方程式 (1.2) は常に解

$$x = \frac{q}{p}$$

を持つ．このように表すことのできる数全体を**有理数**と呼び，有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ で表す．

有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$ を考えると，1 次方程式の範囲では次の意味で話が閉じている．

定理 1.3. $a,b \in \mathbb{Q}$ とし，$a \neq 0$ とする．数 x に関する方程式

$$ax + b = 0 \tag{1.4}$$

の解は $x \in \mathbb{Q}$ を満たす．

定理 1.3 は，$\mathbb{Q}$ を後で導入する**実数**全体のなす集合 $\mathbb{R}$ や，**複素数**全体のなす集合 $\mathbb{C}$ に置き換えてもそのまま成り立つ．一方，既に調べたように $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ に置き換えると，定理 1.3 は成り立たない．

以下は少し進んだ話題であるのと，今回の主題である複素数からはやや外れているので，読み飛ばして次節に進んでも良い．

上の 1 次方程式の話を少し進めて，次を示すことができる．

定理 1.5. $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ とし，$a_{ij} \in \mathbb{Q}$ とする．また，$c_1, \dots, c_m \in \mathbb{Q}$ とする．数 $x_1, \dots, x_n$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \tag{1.6}$$

が解を持つならば，有理数の範囲に限っても解が存在する．即ち，方程式 (1.6) が解を持つならば，$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$ であるような解 $(x_1, \dots, x_n)$ が存在する．

この定理も $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ に置き換えてもそのまま成り立つ．ただし，例えば

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

を考えれば分かるように，一般には係数が全て有理数であっても，有理数ではなく実数や複素数の範囲にも解を持つ．これは有理数は実数であって，また，実数は複素数であることを考えると自然なことである．一方，例えば

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

を考えれば分かるように，どのような範囲で解を考えても解が存在しないこともある．

問 1.7 (やや難しい). $n = 3,\ m = 2$ として定理 1.5 上の主張（解が存在するならばそれは有理数の範囲で存在すること）を確かめよ．
ヒント：素直に変数を消去していけば良い．変数を消去するときにどのような数をかけたり，どのような式を足し引きするのか注意しながら行うこと．

2. 二次方程式と実数・複素数

次に 2 次方程式を考えてみる．例えば $c \in \mathbb{Q}$ とし，x に関する方程式

$$x^2 = c \tag{2.1}$$

を考える．例えば $c = 2$ とする．$1^2 = 1,\ 2^2 = 4$ である．一方，$x \geq 0$ とすると x が増えれば x^2 も増える（x^2 は x に関して**単調増加**である [†3]）．従って $1 < 2(= c) < 4$ であることより方程式 $x^2 = 2$ は自然数の範囲には解を持たない．同様に方程式 $x^2 = 2$ は整数の範囲にも解を持たないことが示せる．更に，方程式 $x^2 = 2$ は有理数の範囲にも解を持たないことが示せる．命題の形で述べておく．

命題 2.2. 方程式 $x^2 = 2$ は $x \in \mathbb{Q}$ が成り立つような（x が有理数であるような）解を持たない．

証明. $p, q \in \mathbb{Z},\ p \neq 0$ とし，$x = \dfrac{q}{p}$ が $x^2 = 2$ を満たすとする．すると，まず $0^2 \neq 2$ であることから $q \neq 0$ が成り立つ．そこで，必要なら p, q をそれぞれ $-p, -q$ に置き換えて $p \in \mathbb{N}$ として良い．また，p, q は互いに素である（共通の約数を持たない）として良い．さて，

$$\frac{q^2}{p^2} = 2$$

が成り立つことから

$$q^2 = 2p^2$$

が成り立つ．従って q^2 は偶数である．ここで q が奇数だとすると，奇数の 2 乗は奇数である [†4] から，これは不合理である．従って q は偶数であるから $q = 2q',\ q' \in \mathbb{Z}$ と表すことができる．すると，$q^2 = 4{q'}^2$ が成り立つことから

$$4{q'}^2 = 2p^2$$

が成り立つ．よって

$$2{q'}^2 = p^2$$

が成り立つから，ある $p' \in \mathbb{N}$ が存在して $p = 2p'$ が成り立つ．従って p, q は共に 2 で割り切れることとなり，互いに素であるという仮定に反する．よって（背理法，帰謬(きびゅう)法 [†5] により）$x^2 = 2$ は $x \in \mathbb{Q}$ が成り立つような解を持たない． □

そこで今度は**実数**を考えることにする．つまり，整数や有理数を考えたときと同じように，例えば「2 乗して 2 になる数」を考えて良いことにすると，少なくとも $x^2 = 2$ という 2 次方程式は解ける．このような数で，負ではないものを $\sqrt{2}$ で表すことにする．一般の実数 c に

[†3] 証明は例えば補題 2.3 を参照のこと．
[†4] 証明を考えてみよ．
[†5] 例えば「誤り」を「謬(あやま)り」とも書くように,「謬」は誤りを意味する．

ついても「2 乗して c になる，負ではない実数 $\sqrt{c}$」を考えたい．負の場合が抜けているが，これは問題にならない．負の実数であって，2 乗して c になる実数を考えたいとする．このような数を仮に d とすると $d < 0,\ d^2 = c$ である．すると $-d$ は $d > 0,\ d^2 = c$ を満たすので，$-d = \sqrt{c}$ が成り立つ．従って $\sqrt{c}$ として，非負の数を考えれば十分である．ここで次のことが問題になる．

- 実数 $\sqrt{c}$ は本当に存在するのか．
- 実数 $\sqrt{c}$ が存在したとしてどのくらい（幾つ）あるのか．

二つ目の問に答えることは比較的容易である．

補題 2.3. $x, y \in \mathbb{R}$ とし，$x, y \geq 0$ とする．もし $x \leq y$ が成り立つならば $x^2 \leq y^2$ が成り立つ．また，$x^2 = y^2$ が成り立つならば $x = y$ が成り立つ．

証明. $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ が成り立つ．また，仮定から $y + x \geq 0$ が成り立つ．一方，$x \leq y$ が成り立つならば $y - x \geq 0$ が成り立つので $y^2 - x^2 \geq 0$ が成り立つ．従って $x^2 \leq y^2$ が成り立つ．また，$x^2 = y^2$ が成り立つとすると $y - x = 0$ または $y + x = 0$ のいずれかが成り立つ．$y - x = 0$ が成り立つのであれば $x = y$ が成り立つ．一方，$y + x = 0$ が成り立つのであれば，$x, y \geq 0$ が成り立つことから $x = y = 0$ が成り立つ． □

補題 2.3 の後半により，$\sqrt{c}$ は存在すればただ一つである．

次に最初の問について考える．$0^2 = 0$ であって，0 は負ではないから $\sqrt{0} = 0$ である．一方，$c \in \mathbb{R}$ について $\sqrt{c}$ が存在したとして，それは非負の実数である，つまり $0 \leq \sqrt{c}$ としているから，（補題 2.3 の前半により）$0 \leq c$ が成り立つ．つまり，$\sqrt{c}$ を考えようとすると c には $c \geq 0$ という制限が付く．それでは $c \geq 0$ とすれば $\sqrt{c}$ が本当に存在するのか，というのは（実は難しい）問題である．例えば $c = 2$ のとき，$\sqrt{2}$ が実際に存在することについては

$$
\begin{gathered}
(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2, \\
(1.414)^2 < 2 < (1.415)^2, \\
(1.4142)^2 < 2 < (1.4143)^2, \\
\vdots
\end{gathered}
$$

が成り立つことから，$1.41421356\cdots$ という，無限に続く小数を考えることにすれば良さそうであることがわかる（今回の主題（複素数）から外れるので，もう少し詳しいことは付録を参照のこと）．そこで次のように定める．

定義 2.4. $c \in \mathbb{R},\ c \geq 0$ とする（c を非負の実数とする）．2 乗して c となる実数であって，非負のものを $\sqrt{c}$ で表し，c の**非負の平方根**と呼ぶ．$c > 0$ の時には $\sqrt{c} > 0$ である．そこで $\sqrt{c}$ を**正の平方根**，$-\sqrt{c}$ を**負の平方根**と呼ぶ．

ここまでの議論により，方程式 (2.1) は（実数の範囲では）次のように解くことができることが示された．

定理 2.5. 方程式

$$x^2 = c \tag{2.1}$$

は $c \geq 0$ のとき，そのときのみ実数の範囲で解をもち，それは $x = \sqrt{c}$ と $x = -\sqrt{c}$ で与えられる．

方程式 (2.1) については一定の結論が得られたので，一般の 2 次方程式について考える．2 次方程式を解くためには実数を考えないといけないことは既に分かっているので，1 次方程式の場合を踏まえて [†6]，初めから実数を係数とする 2 次方程式を考える．定理 2.5 を示す際に用いた (2.1) の解き方を応用すると次を示すことができる．

定理 2.6. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$a \neq 0$ とする．数 x に関する方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.7}$$

は $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき，そのときのみ実数の範囲で解を持ち，解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる．

上の二つの数を $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ でまとめて表す．記号「±」を**複号**と呼ぶ．また，$b^2 - 4ac$ を式 $ax^2 + bx + c$ あるいは方程式 (2.7) の**判別式**と呼ぶ．判別式が 0 に等しいときには $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ は単一の実数 $\dfrac{-b}{2a}$ を表す．このとき，$\dfrac{-b}{2a}$ は方程式 (2.7) の**重解**である，あるいは 2 次式 $ax^2 + bx + c$ の**重根**であるなどと言う．

証明. $a \neq 0$ であるから，$ax^2 + bx + c = 0$ が成り立つことと，$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ が成り立つことは同値である．そこで，以下では方程式

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{2.8}$$

を考える．一般に $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ が成り立つことを踏まえて，$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$ を変形（平方完成）すると，

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

を得る．従って，$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ が成り立つことは，$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ が成り立つことと同値であるが，これは更に条件

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

と同値である．$y = x + \dfrac{b}{2a}$ と置けば，y が実数であることは x が実数であることと同値であるから，方程式 (2.8) に実数解 x が存在することは方程式

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

[†6] 解を表すのに必要な範囲の数（1 次方程式であれば有理数）を係数とする方程式を考えて良いのであった．

に実数解が存在することと同値である．従って，定理 2.5 により，方程式 (2.8) が実数解を持つことは $b^2 - 4ac \geq 0$ が成り立つことと同値である．さて，$b^2 - 4ac \geq 0$ とする．このとき $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$ が成り立つから，定理 2.5 により解は

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

で与えられる．これは

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.9}$$

が成り立つことと同値である．実際，$a > 0$ であれば，非負の平方根が一意である（一つしかない）ことと，両辺を 2 乗すれば等しいことから $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が成り立つ．$a < 0$ であれば，同じ理由により $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が成り立つ．いずれの場合にも二つの解をまとめて表すのであれば式 (2.9) となる．従って方程式 (2.8) の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる． □

ここまでは，なるべく多くの方程式を解くことを念頭に数の種類を増やしてきた．この考え方に従うと，2 次方程式を解くことについても数の種類を増やした方が良い．つまり，実数の範囲では方程式 (2.7) を任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$（ただし $a \neq 0$）について解くことができないので，これを何とかしたい．定理 2.6 の証明をよく見ると，2 次方程式が一般には解けないのは定理 2.5 において「$c \geq 0$」という条件が（定理 2.6 では「$b^2 - 4ac \geq 0$」という形で）付いているためであることが分かる．この条件を外すために次のように定める．

定義 2.10. $c \in \mathbb{R}$ とし，$c < 0$ とする．2 乗して c になる数 α を（仮想的に）考え，c の**平方根**と呼ぶ．特に，2 乗して -1 になる数（つまり，-1 の平方根）の一つを選び $\sqrt{-1}$ で表し，**虚数単位**と呼ぶ [†7]．虚数単位は i や I で表すことが多い [†8]．

ここからは虚数単位 i も実数と同様に数を表すと考える．虚数単位は実数とは異なる（例えば 2 乗すると -1 となる）ので，実数とは区別して

$$a + bi, \quad \text{ただし } a, b \in \mathbb{R},$$

と表されるようなものを新たに数と考えることにする．

定義 2.11. $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ と表すことのできる数を**複素数**と呼ぶ．複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$ で表し，**複素数体**などと呼ぶ．また，$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ のとき，a を z の**実部**,

[†7]注意深く読むと，i の定義に曖昧さがあることに気づくと思う．つまり，(後で示すように）二つある -1 の平方根の一つを選んでこの後の議論を進める．実はそのどちらを選んでも議論が全く同様に進むことを示すことができる．これは体論，とりわけ Galois 理論と呼ばれるものに繋がっていく．

[†8]大学に進むと電流や電圧といった電気に関することや，磁力線や磁場などの磁気に関することを統合的に「電磁気」として扱う．その際複素数が本質的に（根源的に）現れる．電流は習慣的に I や i で表され，こちらの方が歴史的に古い．記号の重複を避けるために，電磁気を扱う際には歴史的な順序では後から現れた虚数単位はしばしば j や J で表される．なお，i は「仮想的=imaginary」の頭文字である．虚数の「虚」も imaginary に由来する．虚数単位や複素数は実際には仮想的ではなく，根源的な存在なので結果的には極めて不適切な名称である．

b を z の**虚部**と呼び，それぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ 等で表す [†9]．二つの複素数 $a_1 + b_1 i$, $a_2 + b_2 i$（ただし $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$）は $a_1 = a_2$ かつ $b_1 = b_2$ が成り立つとき，そのときのみ同じであるとする．特に $0 + 0i$ で表される複素数を**零元**あるいは単に**零**[†10] と呼び 0 で表す．

定義 2.12. 1) $1i = i$ と定める．

2) $b \in \mathbb{R}$ について bi と ib を区別しない．従って $a + bi = a + ib$ である．

3) 実数は虚部が 0 に等しいような複素数と考える．特に，実数の 1 と 0 はそれぞれ複素数の 1 と 0 と同一である．複素数であって，実数ではないものを**虚数**と呼ぶ．

正の数の場合と同様に，負の数の平方根も二つ存在する．一方，正の数の場合と異なり，負の数の平方根には正負を考えることができない．これらについてはこれから調べていく．まず，一般の負の実数 c の平方根と虚数単位 i の関係について調べる．虚数単位は（2 次）方程式を解くために定めた．方程式を解くには四則演算を用いるので，虚数単位が混じっても，四則演算は実数の場合と同様に行えると考えることにする（一般的なことは後で述べる（定義 2.15，定理 2.16））．例えば $c < 0$ のとき，$z = \sqrt{-c}\, i$ と置く（$-c > 0$ に注意せよ）と，次のような計算をして良いことにする．つまり，

$$
\begin{aligned}
z^2 &= (\sqrt{-c}\, i) \times (\sqrt{-c}\, i) \\
&= (\sqrt{-c} \times i) \times (\sqrt{-c} \times i) \\
&= (\sqrt{-c} \times \sqrt{-c}) \times (i \times i) \\
&= (-c) \times (-1) \\
&= c
\end{aligned}
$$

のように計算をして良いことにする．この計算で $c < 0$ のとき，$\sqrt{-c}\, i$ は c の平方根（の一つ）であることが示せた．そこで次のように定める．

定義 2.13. $a \geq 0$ とする．虚数単位 i について

$$\sqrt{-a^2} = ai$$

と定める．

$a < 0$ の場合にも同じようにしてしまうと，とても困ったことになる．例えば $(-1)i = \sqrt{-(-1)^2} = \sqrt{-1} = i$ が成り立つことになる．一方，$(-1)i = -i$ であるから，$2i = 0$ となり $i = 0$ が成り立つ [†11]．これはいかにもまずいので，定義 2.13 では必ず $a \geq 0$ とする．

問 2.14. 1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$ を求めよ．

2) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ がいつ成り立つか調べよ．

ヒント：a, b の符号で場合分けをすると良い．$a = 0$ あるいは $b = 0$ の場合にも注意せよ．

次に，複素数の加法，減法と乗法を次のように定める．

定義 2.15. $z = a_1 + b_1 i$, $w = a_2 + b_2 i$，但し $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とする．

[†9] $\mathrm{re}\, z$, $\mathrm{im}\, z$, $\Re z$, $\Im z$ 等の表し方もある．
[†10] 「ゼロ」というのは本来の「零」の読み方にはないが，このように読むことが通例である．
[†11] 正確には，ここでの計算には次に述べる定義 2.15 を用いている．

1) z と w の**和** $z+w$ を

$$z+w=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

により定める．つまり，複素数の加法は「係数」に注目して計算することにする．

2) $-z\in\mathbb{C}$ を

$$-z=-a_1-b_1i$$

により定める．また，z と w の**差** $z-w$ を

$$z-w=z+(-w)$$

により定める．

3) z と w の**積** zw を

$$zw=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$

により定める．zw は $z\times w$ と表しても良い．

$z=a_1+b_1i,\ w=a_2+b_2i,\ a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ とする．例えば多項式の計算のように zw を計算して良いとすると

$$\begin{aligned}zw&=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)\\&=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2\\&=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)i\end{aligned}$$

が成り立つ．最後の行は定義の式に一致する．上の計算では分配則や結合則を用いているが，複素数の和と積はこれが実際に成り立つように定めている．つまり次が成り立つ．

定理 2.16. $z,z',z'',w,w'\in\mathbb{C}$ とすると次が成り立つ．

1) $(z+z')w=zw+z'w,\ z(w+w')=zw+zw'$.

2) $(z+z')+z''=z+(z'+z'')$.

3) $(zz')z''=z(z'z'')$.

4) $z+w=w+z$. 特に $z+0=0+z=z$.

5) $zw=wz$. 特に $z1=1z=z$.

問 2.17. 1) $z\in\mathbb{C}$ について $-z=(-1)z$ が成り立つことを確かめよ．

2) $z=a_1+b_1i,\ w=a_2+b_2i,\ a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ のとき，$z-w$ を $a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ の形に表せ．

3) $z,w\in\mathbb{C}$ について $z+w=w+z$ と $zw=wz$ が成り立つことを示せ．

4) 定理 2.16 の 1), 2), 3) が成り立つことを確かめよ．

5) $z\in\mathbb{C}$ とし，$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ と表す．$\bar{z}=a-bi$ と置き，z の**共役複素数**あるいは単に**共役**と呼ぶ [†12]．$z\bar{z}$ を a,b を用いて表し，非負の実数であることを示せ．$\sqrt{z\bar{z}}$ を z の**絶対値**と呼び，$|z|$ で表す．

[†12] 本来は「共軛」と書く．「軛（くびき）」は（特に牛馬につける）横木のことである．この字を用いることで，例えば牛車の図を見ると分かるように，軛を通して二つのもの（例えば轅（ながえ））が一纏（まとま）りになっている様を表している．

6) $z \in \mathbb{C}$ とする．$\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ をそれぞれ a, b を用いて表し，それぞれ z の実部と虚部に一致することを示せ．特にいずれも実数である．

除法（割り算）は，実数の場合を踏まえて次のように定める．

定義 2.18. 1) $z \in \mathbb{C}$ とする．$w \in \mathbb{C}$ が $zw = wz = 1$ を満たすとき，w を z の**逆数**と呼び，z^{-1} あるいは $\dfrac{1}{z}$ で表す．

2) $z, w \in \mathbb{C}$ とする．$w \neq 0$ のとき，z の w による**商** $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{C}$ を

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

により定める．定理 2.16 により $\dfrac{z}{w} = w^{-1}z$ が成り立つ．

複素数 z の逆数について,（実数の場合と類似して）次が成り立つ．

命題 2.19. z を複素数とし，$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ とする．$z \neq 0$ が成り立つとき，そのときのみ z^{-1} が（複素数の範囲で）存在する．また，このとき

$$z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

が成り立つ．特に，z^{-1} は存在すれば一意的である．

証明. $z = 0$ とする．w が z の逆数であるとすると $zw = 1$ が成り立つ．一方，$z = 0$ であることから $zw = 0w = 0$ が成り立つ．従って $1 = zw = 0$ が成り立ち，これは不合理である．よって z に逆数が存在するならば $z \neq 0$ が成り立つ．さて，$z \neq 0$ とする．w, w' が共に z の逆数であるとすると，

$$w = w(zw') = (wz)w' = w'$$

が成り立つ．従って z の逆数は一意的である．一方，定義 2.15 により

$$\begin{aligned}
z\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) &= (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right)i \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．定理 2.16 により $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}z = z\dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = 1$ が成り立つから，

$$z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

が成り立つ． □

なお，同様の議論により，複素数を更に一般化しても 0 の逆数をここまでの話と整合的に考えることはできないことを示すことができる．

問 2.20. 1) $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ とする．

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

が成り立つことを示せ．

2) $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ とする．すると，実数の範囲でも，複素数の範囲でも a^{-1} を考えることができるが，これらは一致することを示せ．

問 2.21. z, w を以下のように定めるとき，$z+w, z-w, zw, \dfrac{z}{w}$ を求め，$a+bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ．

1) $z = 3+2i,\ w = 4-3i$

2) $z = 1+i,\ w = 2-i$

3) $z = \cos\theta + i\sin\theta,\ w = \cos\varphi + i\sin\varphi$，ただし $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$，とする．必要であれば三角関数の加法公式

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,$$
$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

を用いて良い．

問 2.22. r, θ を実数とし，$r > 0$ とする．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と置く．$n \in \mathbb{Z}$ について z^n を求め，$a+bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ．必要であれば三角関数の加法公式を用いて良い．

問 2.23 (やや難しい)**.**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

を，実数を係数とする，x に関する多項式（整式）とする．このとき，

$$f(i) = a_n i^n + a_{n-1}i^{n-1} + \cdots + a_0$$

と定める．f, g を実数を係数とする，x に関する多項式とする．

1) $h(x) = f(x) + g(x)$ とすると $h(i) = f(i) + g(i)$ が成り立つことを示せ．

2) $k(x) = f(x)g(x)$ とすると $k(i) = f(i)g(i)$ が成り立つことを示せ．

3) $f(i) = 0$ が成り立つことと，実数を係数とする，x に関するある多項式 $f_1(x)$ が存在して $f(x) = (x^2+1)f_1(x)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

次の節では，複素数を用いると（実係数の）2 次方程式は必ず解けることを示す．この意味では複素数は実数の拡張である．しかし，複素数を用いることで失われるものもある．実数については例えば**正負**や**大小**が定まるが，複素数に関してはこれはうまくいかない．例えば実数の範囲では $b < c$ ならば $a+b < a+c$ が成り立つ．更に $a > 0$ ならば $ab < ac$ が成り立つ．複素数の範囲でも同様に正負が定まるとする．$i \neq 0$ なので $i > 0$ あるいは $i < 0$ である．$i > 0$ とする．$-1 < 1$ なので

$$-1 + i < 1 + i$$

が成り立つ．$i > 0$ としているから，両辺に i を掛けると

$$-i - 1 < i - 1$$

を得る．更に両辺に i を掛けると

$$1 - i < -1 - i$$

を得る（ここで，両辺に -1 を掛けると，$-1 + i > 1 + i$ を得る．これは最初の式と矛盾する，としても議論は終わる [†13]）．最後にもう一度両辺に i を掛けると

$$i + 1 < -i + 1$$

を得る．すると，上の四つの式から

$$1 + i < 1 - i < -1 - i < i - 1 < 1 + i$$

が従う．これは不合理である．今は $i > 0$ としたが， $i < 0$ としても同様である．実数は直線（**数直線**）を用いると直感的に理解しやすく表すことができた．複素数は平面（**複素平面**，複素数平面）を用いると直感的に理解しやすく表すことができる．このことについては後の授業で扱うので，その後で複素数に関して正負や大小を考えられないことについてもう一度考えてみよ．

3. 二次方程式の解

複素数に関する四則演算ができるようになったので，2 次方程式を解いてみる．まずは係数は実数とする．実数の範囲で解いたときと同様に，次が基本となる．

定理 3.1 (定理 2.5 も参照のこと)**.** $c \in \mathbb{R}$ とする．方程式

$$x^2 = c$$

の解は $\sqrt{c}$ および $-\sqrt{c}$ である（なお，$\sqrt{0} = 0 = -\sqrt{0}$ である）．より詳しく，

1) $c > 0$ であれば解は二つの実数 $\pm\sqrt{c}$ である．

2) $c = 0$ であれば解は 0 のみである（重解）．

3) $c < 0$ であれば解は二つの虚数 $\pm\sqrt{-c}\,i$ である．

証明. $c \geq 0$ の場合には既に示したので $c < 0$ とする．まず $c = -1$ とする．複素数 $z = a + bi$ が $z^2 = 1$ を満たすとする．すると

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\,i$$

が成り立つが，これが -1 に等しいことは

$$a^2 - b^2 = -1 \quad \text{かつ} \quad ab = 0$$

[†13] 正負や大小が実数と同じような性質を持つように定められるのであれば，$i^2 > 0$ となるはずであるが，$i^2 = -1$ なのでそもそも無理な話である．

が成り立つことと同値である．二番目の条件は $a=0$ または $b=0$ と同値である．$a=0$ であれば，最初の式から $-b^2=-1$ を得る．従って $b=\pm 1$ が成り立つ．$b=0$ とすると最初の式から $a^2=-1$ を得るが，$a\in\mathbb{R}$ としているからこのような a は存在しない．逆に $a=0,\ b=\pm 1$ が成り立つとすると，$a+bi=\pm i$ が成り立つ．定義により $i^2=-1$ が成り立つ．また，$(-i)^2=((-1)i)^2=(-1)^2i^2=-1$ が成り立つ．よって $z^2=-1$ の解は $\pm i$ の二つである．c が一般の負の実数であるとする．$c=-c',\ c'>0$ と表す．$z^2=c$ が成り立つことは $\dfrac{z^2}{c'}=-1$ が成り立つことと同値である．更に，これは

$$\left(\frac{z}{\sqrt{c'}}\right)^2=-1$$

が成り立つことと同値である．従って，上で示したことから

$$\frac{z}{\sqrt{c'}}=\pm i$$

が成り立つ．

$$\sqrt{c'}\,(-i)=\sqrt{c'}(-1)i=-\sqrt{c'}\,i$$

が成り立つから，$z^2=c$ の解は $\pm\sqrt{-c}\,i$ の二つである．定義 2.13 により $\sqrt{-c}\,i=\sqrt{c}$ が成り立つ． □

定理 3.2. $a,b,c\in\mathbb{R}$ とし，$a\neq 0$ とする．数 x に関する方程式

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2.7}$$

の，複素数の範囲での解について次が成り立つ．

1) $b^2-4ac>0$ のとき，方程式 (2.7) は二つの解を持つ．解は実数であって，

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる．

2) $b^2-4ac=0$ のとき，方程式 (2.7) は一つの解を持つ（重解）．解は実数であって，

$$-\frac{b}{2a}$$

で与えられる．

3) $b^2-4ac<0$ のとき，方程式 (2.7) は二つの解を持つ．解は虚数であって，

$$\frac{-b\pm\sqrt{|b^2-4ac|}\,i}{2a}$$

で与えられる．これらは互いに共役である．

三つの場合で見かけがそれぞれ少し異なるが，いずれの場合にも解は同一の式

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる（$b^2-4ac=0$ の場合には一つの数しか表さない）．

証明．最初の二つの場合は定理 2.6 を書き換えただけである．$b^2-4ac<0$ とする．この場合にも定理 2.6 の証明を途中まではそのまま使える．つまり，x が方程式 (2.7) の解であることと，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

が成り立つことは同値である．定理 3.1 により，方程式

$$y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

の解は

$$y=\pm\frac{\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}\,i$$

の二つであるから，方程式 (2.7) の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{|b^2-4ac|}\,i}{2a}$$

の二つである．$b^2-4ac\neq 0$ であるから，これらは虚数である（実数ではない）． □

問 3.4. 以下に挙げる 2 次方程式について，

a) 判別式を求めよ．また，解の公式を用いて複素数の範囲で解け．

b) 左辺を平方完成し，それを用いて解き，a) の結果と比較せよ．

1) $x^2+4x+4=0$

2) $x^2+6x+13=0$

3) $x^2+2x+1=0$

4) $x^2-2x+a=0$，ただし $a\in\mathbb{R}$ を定数とする．

有理数を係数とする 1 次方程式は，有理数の範囲で解けた（定理 1.3）．また，これは「有理数」を「実数」や「複素数」に置き換えても成り立つ．一方，2 次方程式については，実数を係数とするものについては複素数の範囲で必ず解けた．それでは，係数を複素数とするとどうなるであろうか．これは後の授業で扱うので，ここでは方程式

$$x^2=i \tag{3.5}$$

のみについて考える．1 次方程式は，係数がどのような種類の数であっても必ず一つの解を持つ．2 次方程式についても同じことが成り立つとするならば，実数を係数とする 2 次方程式の解の個数は，判別式が 0 でなければ二つであることから，方程式 (3.5) にも解が二つ存在すると期待される．実際，方程式 (3.5) の判別式を形式的に計算すれば $0^2+4i=4i$ となり，0 ではない．ところで，$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$ であるから，

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$$

が成り立つ．同様に $\left(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$ も成り立つ．従って，方程式 (3.5) には少なくとも二つの複素数解が存在する．実はこれら以外の解は存在しないことを示すことができる．つまり，方程式 (3.5) は丁度二つの複素数解を持つ．このことを一般化したのが代数学の基本定理である．

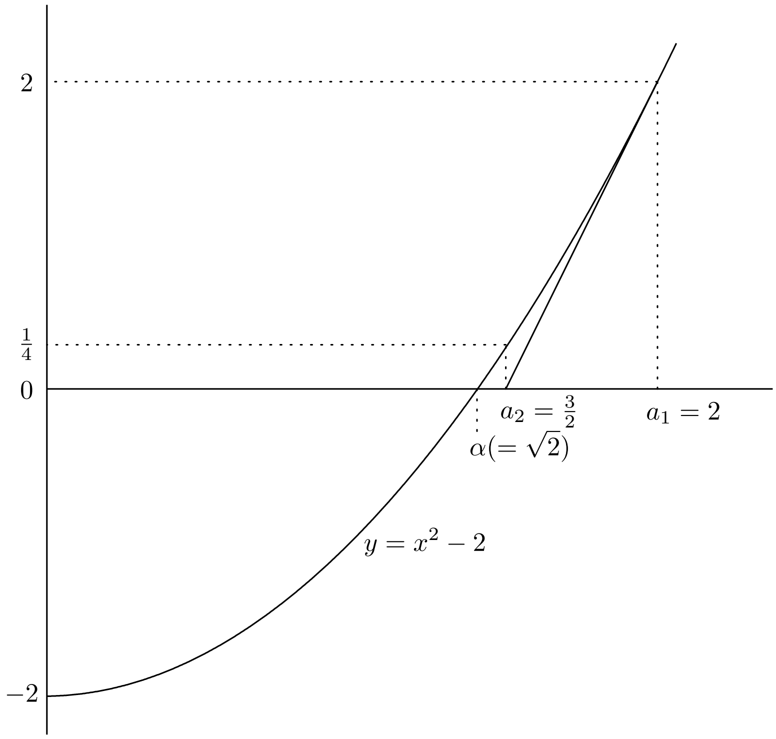

図 1: $y = x^2 - 2$ のグラフと a_1, a_2

（見やすさのために x 軸方向を 2 倍してある）

4.　付録

ここでは実数の範囲で $x^2 = 2$ を解くことを考える．第 2 節では $\sqrt{2}$ を小数で近似することで理解したが，これは $\sqrt{2}$ の実際の値を知らないと難しい．そこで，$\sqrt{2}$ の大雑把な値のみを用いて，有理数からなる数列の極限として $\sqrt{2}$ を理解してみる．$\alpha \in \mathbb{R}$ を方程式 $x^2 = 2$ の，$\alpha > 0$ を満たす解とする．このとき $1 < \alpha < 2$ が成り立つ（$\sqrt{2}$ の実際の値を用いるのはここと，不等式 (4.2) だけである）．さて，$a_1 = 2$ とし，a_n を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} \tag{4.1}$$

により定める．これは $y = x^2 - 2$ のグラフの $(a_{n-1}, a_{n-1}^2 - 2)$ における接線を引き，それと x 軸の交点の x 座標を a_n として得られる数列である（図 1）．

$a_{n-1} > 0$ であれば $\dfrac{a_{n-1}}{2} > 0$ かつ $\dfrac{1}{a_{n-1}} > 0$ が成り立つので $a_n > 0$ が成り立つ．従って漸化式 (4.1) により，全ての自然数 n について a_n が定まる．また，相加平均と相乗平均の関係により

$$a_n \geq 2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}\frac{1}{a_{n-1}}} = \sqrt{2} > 1 \tag{4.2}$$

が成り立つ．更に，$a_{n-1} \in \mathbb{Q}$，$a_{n-1} \neq 0$ ならば $a_n \in \mathbb{Q}$ が成り立つ．$a_1 = 2 \in \mathbb{Q}$ なので，得られる数列は 1 より大きな有理数から成る．さて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定す

る．極限値を a とすると，任意の n について $a_n > 1$ であることから $a \geq 1$ が成り立つ．すると，式 (4.1) により

$$a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

が成り立つので，$a^2 = 2$ が成り立つ．従って $a = \alpha (= \sqrt{2})$ が成り立つ．

ここで $b_n = a_n - \alpha$ と置く．$\alpha^2 = 2$ であることから，

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - \alpha \\ &= \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{a_{n-1} - \alpha}{2} - \frac{a_{n-1} - \alpha}{a_{n-1}\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n-1}\alpha}\right) b_{n-1} \end{aligned}$$

を得る．更に，$\alpha^2 = 2$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n-1}\alpha} &= \frac{a_{n-1}\alpha - 2}{2a_{n-1}\alpha} \\ &= \frac{\alpha(a_{n-1} - \alpha)}{2a_{n-1}\alpha} \\ &= \frac{1}{2a_{n-1}} b_n \end{aligned}$$

が成り立つ．任意の n について $a_n > 1$ が成り立つことから

$$|b_n| = \left|\frac{1}{2a_{n-1}}\right| |b_{n-1}|^2 < \frac{1}{2}|b_{n-1}|^2$$

が成り立つ．従って

$$|b_n| < \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} = \frac{2}{2^{2^{n-1}}}$$

が成り立つ．よって $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ が成り立つが，$b_n = a_n - \alpha$ であることと，α が定数であることから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ．このように方程式の根をグラフを用いて近似する方法を **Newton 法**と呼ぶ [†14]．最後の式を見ると分かるように，a_n の α への収束は極めて速い [†15]．そのため a_3 以降は α のすぐ近くにあり，見やすく描くことが難しいので，図 1 には a_1 と a_2 しか描いていない．

このように，有理数と実数の差は方程式を解けるか否かということよりも，収束する数列について，その極限値がどのような数になるかという点にある．つまり，有理数から成る，収束する数列の極限値は必ずしも有理数とは限らない（例えば上の例）．一方，実数から成る，収束する数列の極限値は必ず実数であることが示せる（これは「示す」というよりほとんど定義である）．このように，収束する数列の極限値に関する性質を要請して実数を定めると，判別式が非負であるような 2 次方程式も結果として解ける，というのが実際のところである．

[†14] 万有引力に名前が出てくる Newton である．

[†15] 興味があれば例えば計算機で $\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}$ を求めてみると良い．よほど精密な計算をした場合（例えば精度保証付き計算をして，その精度を極めて高く取るなどした場合）を除けば，数秒あるいはもっと短い時間で「0」となるはずである．もちろん実装や計算機の性能に依存した話ではある．

参考文献

[1] 複素数の幾何学（数学入門シリーズ３），片山 孝次著，岩波書店，1982.

[2] 複素数と複素数平面，一松 信著，森北出版，1993，2010（POD 版）.

[3] 微分積分読本 －１変数－，小林 昭七著，裳華房，2000.

[4] 軽装版　解析入門 I，小平 邦彦著，岩波書店，2003.

[1] と [2] は複素数や複素平面に関する参考書である．[3] と [4] は微分積分に関する参考書で,冒頭で実数について扱っている．有理数列の収束極限（値）として実数を理解（定義）する [†16] のは実は多くの準備が必要で難しい．これらの参考書ではそうではなく，Dedekind の切断と呼ばれる方法を採っている．それでも [3] と [4] は大学生向けなのでやや難しいかもしれない.

なお，この小冊子に訂正や補足がある場合
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜asuke/aboutme/general.html

に掲載する予定である.

[†16] $\mathbb{Q}$ の**完備化**と呼ばれる．完備化をうまく用いると $\mathbb{R}$ ではないが，方程式が必ず解を持つような数が得られ，特に整数論で重要である.