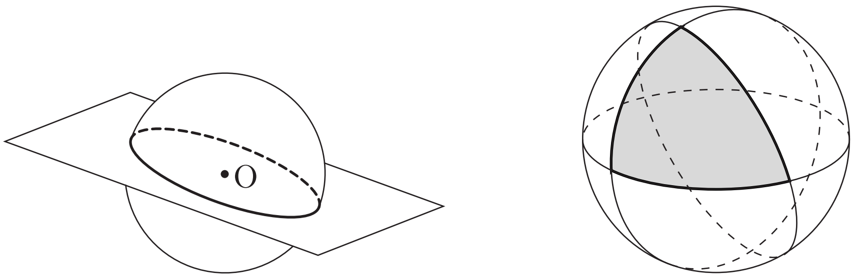
高校生のための現代数学講座　　　東京大学
「曲面の不思議」　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3) 金井 雅彦　　　2013 年 7 月 27 日

「多面体とオイラーの定理」

3 次元ユークリッド空間内の原点を中心とする半径 1 の球面

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考える．原点 O を通る平面と球面 $\mathbb{S}^2$ の交わりを**大円**と呼ぶ．例えば，$\mathbb{S}^2$ を地球にみたてたとき，経線や赤道は大円であるが，赤道以外の緯線は大円ではない．球面の大円は，平面幾何における直線の代用品と考えられる．とくに n 本の大円で囲まれた図形を（**球面**）n **角形**と呼ぶ.



(a) 大円　　(b) 球面 3 角形

図 1: 大円と球面 3 角形

定理（ハリオットの定理） 球面 n 角形に対し，その面積を A，内角を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると，

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = (n-2)\pi + A$$

が成り立つ.

平面内の n 角形に対しては，その内角の和は常に $(n-2)\pi$ に等しかった．平面幾何におけるこの事実とハリオットの定理を比較するしたとき，後者においては面積 A が現れることに注意しよう．とくに，球面 3 角形に対してはその内角の和は常に 2π より大きい.

ハリオットの定理の証明． $n \geq 4$ の場合には，与えられた n 角形を 3 角形に分割し $n = 3$ の場合の定理を適用すればよい．以下で $n \leq 3$ の場合を議論する.

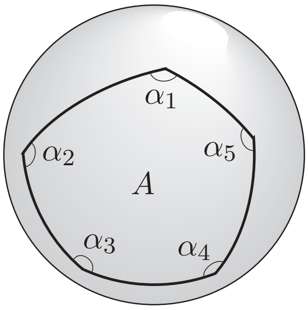


図 2: ハリオットの定理

まずは $n = 2$ の場合である．[1] この場合，ふたつの内角の大きさは一致する．そこで，それを α としよう．すると，面積 A は球面全体の面積 4π に $\alpha/2\pi$ を乗じたものである．すなわち，

$$A = 4\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

が成り立つ．これでハリオットの定理が $n = 2$ のときに成立することが確かめられた．

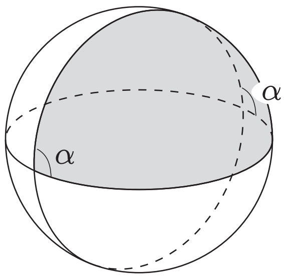


図 3: 球面 2 角形

最後に $n = 3$ の場合を考える．点 P, Q, R を頂点とする球面 3 角形が与えられたとしよう．これら頂点における内角をそれぞれ α, β, γ とする．また，球面 $\mathbb{S}^2$ 上の点であって，点 P, Q, R と原点に関し対称な位置にある点をそれぞれ P′, Q′, R′ とする．さらに 2 点 P, P′ を頂点とし ΔPQR を含む球面 2 角形を T_{P} とする．T_{P} のふたつの内角の大きさはともに α である．同様な仕方でさらにふたつの 2 角形 $T_{\mathrm{Q}}, T_{\mathrm{R}}$ をとる．$\triangle\mathrm{PQR} = T_{\mathrm{P}} \cap T_{\mathrm{Q}} \cap T_{\mathrm{R}}$ であることに注意しよう．したがって，$T = T_{\mathrm{P}} \cup T_{\mathrm{Q}} \cup T_{\mathrm{R}}$ としたとき，

[1]球面幾何においては 2 角形が考え得る．これも平面幾何と球面幾何の相違のひとつである．

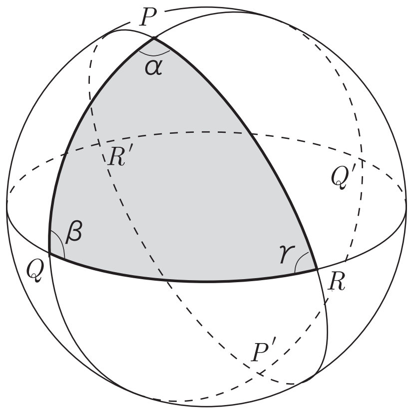


図 4: ハリオットの定理の証明（$n = 3$ のとき）

$$
\begin{aligned}
(T \text{ の面積}) &= (T_{\mathrm{P}} \text{ の面積}) + (T_{\mathrm{Q}} \text{ の面積}) + (T_{\mathrm{R}} \text{ の面積}) - 2 \times (\Delta\,\mathrm{PQR} \text{ の面積}) \\
&= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2A
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方，T の補集合 $\mathbb{S}^2 \setminus T$ [2] は T 自身と原点に関して対称であるから，それらの面積は一致する：$(T \setminus \mathbb{S}^2$ の面積$) = (T$ の面積$)$. したがって，

$$
(T \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\mathbb{S}^2 \text{ の面積}) = 2\pi
$$

が従う．以上から，$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$ が結論される． □

いま証明を終えたハリオットの定理から，次の定理を得る．

定理（オイラーの定理） 球面 $\mathbb{S}^2$ が多角形に分割されているとする．そこに現れる頂点 (vertex)，辺 (edge)，面 (face) の個数をそれぞれ v, e, f としたとき，常に次の等式が成り立つ：

$$
v - e + f = 2.
$$

証明. 分割に現れる面を $F_1, \cdots, F_f$ とする．各面 F_j $(j = 1, \cdots, f)$ は n_j 角形で，その内角は $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jn_j}$，面積は A_j であるとすると，ハリオットの定理より，

$$
\sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} = (n_j - 2)\pi + A_j \tag{$*$}
$$

[2] 球面 $\mathbb{S}^2$ から T を取り除いた図形を，T の補集合と呼び，記号 $\mathbb{S}^2 \setminus T$ で表す．

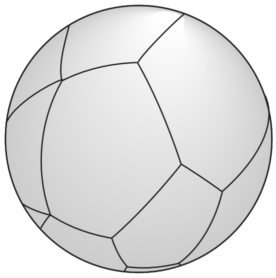


図 5: 球面の多角形分割

を得る．この等式の両辺の $j=1,\cdots,f$ に関する和を計算したい．まず左辺の和を考えよう．その値は，分割に現れる各頂点においてそこに集まる角の和をとり — その値は常に 2π である — さらに頂点全体に渡って総和をとったものに等しい．すなわち，

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{n_j}\alpha_{jk}=2\pi\cdot v$$

が成り立つ．次に n_j の $j=1,\cdots,f$ に関する和を求めよう．もちろん各面 F_j は n_j 本の辺を持つ．これをすべての面に関し足し合わせれば，各辺が 2 度づつ数えられたことになり，その結果 $2e$ を得る：

$$\sum_{j=1}^{f}n_j=2e$$

一方，A_j の総和は球面 $\mathbb{S}^2$ の面積 4π に等しい：

$$\sum_{j=1}^{f}A_j=4\pi.$$

したがって，式 $(*)$ の両辺を $j=1,\cdots,f$ に関し加え合わせることにより，

$$2\pi\cdot v=2e\cdot\pi-2\pi\cdot f+4\pi,\qquad \text{すなわち}\qquad v-e+f=2$$

を得る． □