高校生のための現代数学講座　東京大学
「曲面の不思議」　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　逆井 卓也　2013 年 7 月 27 日

# 「曲面の曲率と多面体の『とんがり度』」

## 1　歴史を少しだけ

３次元の世界に住んでいる私たちにとって，曲面というものは，物体の表面として現れる身近な存在であると言えます．時代や文化の違いはあれ，身の回りが３次元の物体（立体）とその表面としての曲面に囲まれているという事実は古今東西変わるはずもなく（技術の驚異的発達により未来では違うかもしれません $\cdots$），このことからも，曲面や立体を理解しようとするのは純粋な数学の観点からだけでなく，実用上の観点からも重要な研究対象，より素朴には関心事であったと言えるでしょう．

最も基本的なものとして，地球の表面もまた曲面となっているわけですが，それを宇宙に出て直接眺めることなく，球面の形をしていると結論づけた古代ギリシャ人の英知は人類の輝かしい歴史であると言えます．また，エラトステネス（273?–194 B.C.）による，太陽の入射角を用いた地球の全周の推定値（約 46000 km，実際は約 40,000 km）は当時の技術を考えると驚異的なものです．同時期に, 数学の世界ではアルキメデス（287?–212 B.C.）によって球面の表面積がそれに外接する円柱の側面積と等しいということが示されています（図 1 を参照）．なお，現存はしていないものの，アルキメデスの墓石には球体とそれに外接する円柱が描かれていたそうです．

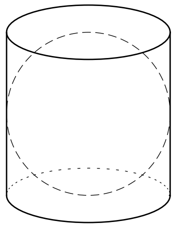

図 1: 球体とそれに外接する円柱

こうした例からも分かるように，曲面の研究の歴史は息を呑むほどに長いものとなっています．その中でもとくに，デカルト（1596–1650）による座標の導入，ニュー

トン（1643–1727）やライプニッツ（1646–1716）による**微分積分**の理論を経て，**ガウス**（1777–1855）が生み出した曲面の**曲率**と呼ばれる量は，曲面の数学的研究に爆発的かつ現代的な発展をもたらしました．

## 2　曲面の曲がり方

ガウスによりますと，曲面の曲がり方は大きく

- 凸状（出っ張っている），
- 鞍状（峠のようなもの），
- それらの中間状態（平らな面もこれに含まれます），

という３種類に分けることができます．図 2 を見て下さい．その図の左にある「凸状」の図を見て,「凹状（へこんだ状態）はないのか？」と思うかもしれませんが,それは「凸状」の図を上下逆さまに見ればよく,「凸状」と同じものとして扱います．３つ目の「中間状態」というのは図 2 の右の図のようなものなのですが，稜線（直線部分）を真ん中を押し上げる形で曲げれば「凸状」，押し下げる形で曲げれば「鞍状」になりますので,「凸状」と「鞍状」のちょうど中間の状態にあることが分かります．

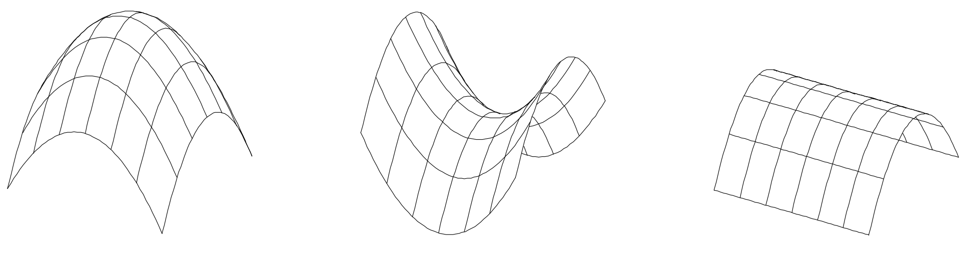

図 2: いろいろな曲がり方．左から「凸状」,「鞍状」,「中間状態」．

具体的な曲面として，図 3 の球面を見てみますと，どの場所も「凸状」となっています．ドーナツ状の曲面（**トーラス**と言います）の図を見てみますと，外側では「凸状」，真ん中の穴に近い内側では「鞍状」，稜線（このドーナツを紙で上下から挟んだときに紙と接する部分）では「中間状態」となっていることが分かります．

ガウスはこのような曲がり方を数を使って表す方法を発見しました．これが**曲率**と呼ばれる量で，大雑把には，曲面上の各点に対して「凸状」の点の付近では正の

図 3: 球面とトーラス

値,「鞍状」の点の付近では負の値,「中間状態」の点では 0 の値を与える約束（関数）のことです．曲率がある点で大きな正の値となっていますと，その点の周りは鋭く尖った形をしているというわけです.

曲率を厳密に定義するには微分を使わないといけません．この講義では，微分の知識を仮定しませんので，代わりに曲率と本質的に等価な**『とんがり度』**という量を考えて，正の曲率を持つ曲面（凸多面体）が持つ性質に迫ってみたいと思います.

## 3　凸多角形の内角の総和，外角の総和

空間内にある凸多面体を考える準備として，まず平面内の**凸多角形**を考えてみましょう．ここで**凸多角形**とはすべての内角が 180° 未満であるような多角形（三角形，四角形，五角形，...）のことです．図 4 の左と真ん中は凸多角形ですが，右のものは凸多角形ではありません.

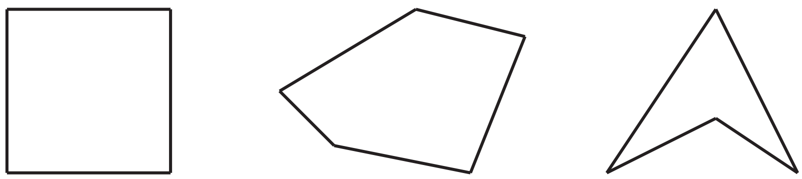

図 4: 凸多角形（左と真ん中）とそうでない多角形（右）

いま，凸多角形の内角の総和に注目してみましょう．まず，三角形の内角の和が 180° であることは，平行線と錯角の関係などを使うと証明することができます．一般の凸多角形については，対角線をいくつか引くことにより，三角形に分割します.

数えてみると分かりますように，凸 $n$ 角形 は $(n-2)$ 個の三角形に分割することができますから，結局

$$凸\ n\ 角形の内角の総和 = (n-2) \times 180^\circ$$

という公式が得られます（ここまでは凸でない多角形についても同じことが成り立ちます）.

この講義では以下，角度を表すのに度数法でなく**弧度法**（ラジアン）を用いることにします．これらは

$$360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$$

という関係で換算することができます（たとえば $180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$ となります）．$1\,\mathrm{rad}$ とは半径 1 の円周において長さ 1 の弧に対応する中心角を表しています．rad と書くことはしばしば省略されます（講義でもこの習慣に従います）．弧度法を用いると上の公式は

$$凸\ n\ 角形の内角の総和 = (n-2)\pi$$

と表されます.

さて，この公式を少し変形して，別の視点から見てみましょう．凸多角形のある頂点 $v$ を出発点として，多角形の内側を左に見ながらその周りを一周してみますと，$v$ を出発してまず直線状に進み，次の頂点で一気に左に曲がり，そして直線状に進み，また次の頂点で一気に左に曲がり，ということを繰り返して（途中で自分自身の軌跡と交わることなく）$v$ に戻ることになります．各頂点でどのくらい左に曲がったかを表す角度がその頂点での外角（図 5）にほかなりません.

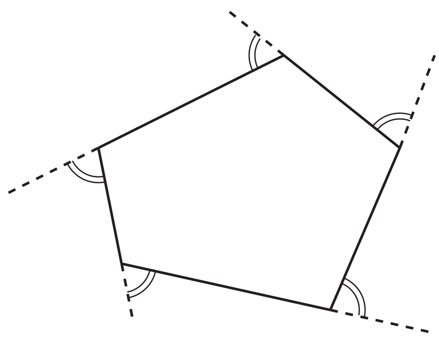

図 5: 凸多角形の頂点における『とんがり度』= 外角

外角が $0^\circ$ に近づけば近づくほど，内角は $180^\circ$ に近づきますので，その角は鈍くなります．反対に外角が $180^\circ$ に近づけば近づくほど，内角は $0^\circ$ に近づきますので，

その角は鋭くなります．言い換えると，外角の大きさはその角が尖っている具合を表していると言えます．そこで

$$\begin{aligned}\text{凸多角形の頂点}\,v\,\text{における『とんがり度』} &= \text{頂点}\,v\,\text{における外角}\\ &= \pi - \text{頂点}\,v\,\text{における内角}\end{aligned}$$

と定めますと，凸 $n$ 角形の内角の総和の公式を用いることで,

$$\begin{aligned}\text{凸}\,n\,\text{角形の各頂点での『とんがり度』の総和} &= \text{凸}\,n\,\text{角形の外角の総和}\\ &= \text{凸}\,n\,\text{角形の}\,(\pi-\text{内角})\,\text{の総和}\\ &= n\pi - (\text{凸}\,n\,\text{角形の内角の総和})\\ &= n\pi - (n-2)\pi\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

となることが分かります．実際，図 5 にある外角を 1 点の周りに集めるとちょうど 1 周分 $(= 2\pi)$ になっています.

## 4　凸多面体と『とんがり度』

**凸多面体**とは正多面体のように,

- 有限個の面からなり，かつ全ての面が凸多角形,
- 各辺はちょうど 2 つの面に共有されている,
- どの面も地面につけることができる,

といった性質を満たしている空間図形のことです．このような凸多面体に対して,前節で見た凸多角形の『とんがり度』の総和の公式の類似が成り立つか考えてみましょう.

まず凸多面体の『とんがり度』はどのように定義できるでしょうか．そのために凸多面体の尖りを最も顕著に表している頂点のまわりに注目します．いま仮に頂点 $v$ の周りで全く尖っていなかったとしますと，$v$ の付近は図 6 のようにいくつかの面が平面の上で $v$ を取り囲むように並んでいるはずです．それらの面の $v$ での内角の総和はもちろん $2\pi$ となっています.

一方で，尖っている頂点 $w$ の周りを考えてみますと，$w$ の周りの辺をひとつ選んで切り開くことができ，それを平面の上に広げたものはいくつかの面が $w$ を囲んで

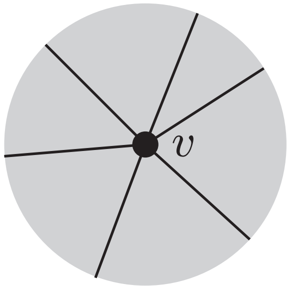


図 6: 尖っていない頂点の周りの様子

いるものの，図 7 の左のように一部が欠けた状態になっているはずです．鋭く尖っていればいるほど欠けた領域が大きくなります．このことは円錐の展開図を思い出してみるとよいでしょう．円錐の展開図は扇形と円を合わせた図形となりますが，扇形の中心角が小さければ小さいほどできあがる円錐は尖ったものになります．

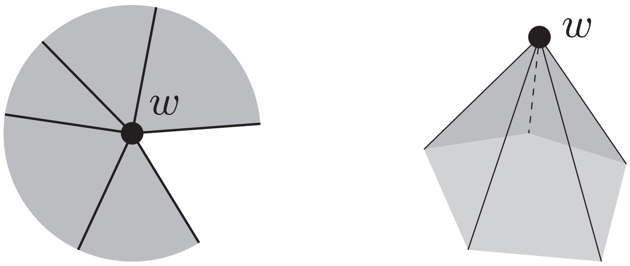


図 7: 頂点の周りの面を広げた様子

これを踏まえますと，凸多面体に対して

$$\text{頂点 } v \text{ における『とんがり度』} = 2\pi - \text{頂点 } v \text{ に集まる面の } v \text{ での内角の総和}$$

と定義するのが良さそうです.『とんがり度』が 0 に近ければその頂点のまわりは平らな面のようになり，$2\pi$ に近ければ，その頂点は針のように尖った形をしていることになります.

こうして定義された『とんがり度』を凸多面体のすべての頂点で足し合わせるとどうなるでしょうか.

**例 1.** まずは正四面体の『とんがり度』の総和を求めてみましょう．正四面体は 4 つの正三角形からなる凸多面体で，各頂点にちょうど 3 枚の正三角形が集まっています．正三角形のひとつの内角は $\dfrac{\pi}{3}$ ですから，ひとつの頂点での『とんがり度』は

$2\pi - 3 \times \dfrac{\pi}{3} = \pi$ となります．頂点は全部で 4 つありますので，正四面体の『とんがり度』の総和は $4 \times \pi = 4\pi$ となります．

**問題 2.** 次の凸多面体の『とんがり度』の総和をそれぞれ求めてみましょう．

*1.* 立方体（正六面体）

*2.* 直方体

*3.* 正八面体（全部で 8 枚の正三角形が各頂点に 4 つずつ集まっている）

*4.* 正十二面体（全部で 12 枚の正五角形が各頂点に 3 つずつ集まっている）

*5.* 正二十面体（全部で 20 枚の正三角形が各頂点に 5 つずつ集まっている）

*6.* 四角錐

*7.* 五角柱

*8.* $n$ 角柱

*9.* $n$ 角錐

## 5　『とんがり度』の総和の一般公式を作ろう

さて，上の計算例と問題の解答から「凸多面体の『とんがり度』の総和は必ず $4\pi$ となるのでは？」という予想が立てられます．実際，その予想は正しく，この講義と次の講義でその事実の証明を与えてみたいと思います．そのためにまずは『とんがり度』の総和の一般公式を作ってみましょう．

いま凸多面体の頂点 (vertex) の数を $V$，辺 (edge) の数を $E$，面 (face) の数を $F$ とし，$F$ 個の面が $n_1$ 角形，$n_2$ 角形, . . ., $n_F$ 角形であるとします．このとき，$V$ 個の頂点 $v_1$，$v_2, \ldots,$ $v_V$ の『とんがり度』の総和は

$$\begin{aligned} &2\pi V - (\text{頂点 } v_1 \text{ の周りの角度の総和}) - (\text{頂点 } v_2 \text{ の周りの角度の総和}) \\ &\qquad - \cdots - (\text{頂点 } v_V \text{ の周りの角度の総和}) \end{aligned}$$

となります．ここで 2 項目以下を見てみますと，そこには $n_1$ 角形，$n_2$ 角形, . . ., $n_F$ 角形の角がもれなく一度づつ現れていることが分かります．よって上の式は

$$\begin{aligned} &2\pi V - (n_1 \text{ 角形の内角の総和}) - (n_2 \text{ 角形の内角の総和}) - \cdots - (n_F \text{ 角形の内角の総和}) \\ &= 2\pi V - \sum_{k=1}^{F} (n_k - 2)\pi = 2\pi V - \pi \sum_{k=1}^{F} n_k + 2\pi F \end{aligned}$$

と等しくなります．さらに $\sum_{k=1}^{F} n_k$ は各多角形の周りの辺の数の総和ですが，それは凸多面体の辺をそれぞれ 2 回ずつ数えていることに他ならないので，$\sum_{k=1}^{F} n_k = 2E$ となります．以上より

$$\text{凸多面体の『とんがり度』の総和} = 2\pi(V - E + F)$$

であることが分かりました．この一般公式より，私たちの予想を証明するには

「凸多面体に対し $V - E + F = 2$ が成り立つ」

ということを示せばよいことになりました．

# 6　球面への投影

私たちの予想は実は次のような定理として知られています．

**定理 1** (オイラーの定理)**.** 凸多面体の頂点 *(vertex)* の数を $V$，辺 *(edge)* の数を $E$，面 *(face)* の数を $F$ とすると

$$V - E + F = 2$$

が成り立つ．

例 1 や問題 2 で見た凸多面体では確かにこの関係式 $V - E + F = 2$ が成り立っています．しかしながらこの定理が主張しているのは，**すべての凸多面体**に対して関係式が成り立つということであり，例をどんなにたくさん挙げても証明したことにはなりません．

このような形の主張を証明するには，起こりうるすべての可能性を排除しないように気をつけて議論を進めないといけません．いま与えられた凸多面体を $P$ とします．定理の内容は，面と辺と頂点の数のみを問題としていますので，$P$ を拡大もしくは縮小して考えても同じです．そこでまず，必要なら縮小して $P$ が半径 1 の球面

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

の内側に含まれているようにします．さらに原点 $O = (0, 0, 0)$ が $P$ の内部に入っているとします．このとき，$P$ の表面上の各点 $w$ に対して半直線 $Ow$ を考えますと，$Ow$ は球面 $\mathbb{S}^2$ の点とただ一つの点 $S(w)$ で交わります．これは原点 $O$ を光源，球面 $\mathbb{S}^2$ をスクリーンとして，その上に映し出された凸多面体の各点 $w$ の影 $S(w)$ を考え

ることに対応します．ここで，図 8 を見ると分かりますように，凸多面体の辺 $e$ の影は球面における**大円**の弧となっています．ここで大円とは原点 $O$ を通る平面と球面 $\mathbb{S}^2$ の交わりのことです．大円は球面上の 2 点の最短経路を与えますので，球面における「直線」とみなされます．

凸多面体 $P$ のすべての辺を球面 $\mathbb{S}^2$ に投影することにより，$\mathbb{S}^2$ をいくつかの大円の弧で囲まれた領域（それぞれを**球面多角形**と呼びます）に分割することができます．元の凸多面体の頂点，辺，面は，球面多角形たちの頂点，辺（大円の弧），面と 1 対 1 に対応していることに注意しますと，こうして得られた球面の分割に対して オイラーの定理（$V - E + F = 2$）を示せばよいことになります．

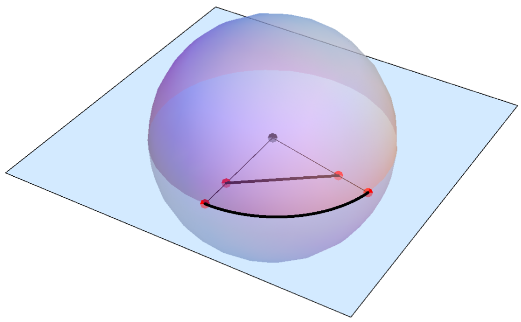

図 8: 辺の影は大円の一部

オイラーの定理の証明のポイントは球面多角形の面積を球面多角形の内角を使って表す**ハリオットの公式**を証明することです．これについては次の講義で紹介し，その証明を与えます．