高校生のための現代数学講座　　東京大学
「曲面の不思議」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　高木　寛通　　2013 年 7 月 27 日

「線織面と可展面」

1　紙を丸めてできる曲面（可展曲面）

1.1　どの２次曲面がよりまっすぐ？

今日の私の講義は，前回第２講の続きです．前回，線織面である２次曲面は，柱面，コーンと，双曲放物面（馬の鞍），１葉双曲面（籐の椅子）に限ることを見ました．これらについて，“曲がっているのにまっすぐな曲面”という見方をしたわけですが，これらのどれがよりまっすぐなのでしょうか？直感的に，双曲放物面，１葉双曲面はまっすぐと言っても，随分ねじれていて，柱面，コーンの方がまっすぐな感じがしますね．ところが，前回見たように，双曲放物面，１葉双曲面の各点は２本の直線が通っているのに対して，柱面，コーンについては，各点を１本の直線しか通っていません．この事実にも関わらず，柱面，コーンのほうがまっすぐだと感じるのはなぜでしょうか？

{ 柱面, コーン }　　　　{ 双曲放物面，１葉双曲面 }

という対立軸で考えましょう．すると，その理由は，**柱面, コーンが紙を（折ることなく）丸めて作れるのに対して，双曲放物面，１葉双曲面はそうできないから**と言えるのです．柱面, コーンが紙を丸めて作れるのは納得できるでしょう[1]．紙を丸めて作れる曲面のことを**可展曲面（かてんきょくめん）**と呼びます[2]．双曲放物面，１葉双曲面が紙を丸めて作れないことを納得するために，可展曲面の性質を一般的に考察してみましょう．そのため，紙をいろいろ丸めてみて，できた曲面に定規を当ててみると，次のようなことが分かります．

観察結果

可展曲面は，定規が平面的にピタッと接する部分と，直線的に接する部分からなる．よって，可展曲面は線織面の例でもある．

[1]ただし，コーンは，特異点である頂点で切り離した上下の部分がそれぞれ紙を丸めて作れるという事です．

[2]耳慣れない用語と思いますが,「紙に**展**開**可**能な**曲面**」という事です．

双曲放物面，１葉双曲面が，この性質を持たないことを示して，これらが可展曲面でないことを見ることにしましょう[3]．双曲放物面，１葉双曲面の各点を通る直線が丁度２つあることに注目します．よって，もしこれらが可展曲面ならば（背理法による証明です），各点で定規をピタッとくっつけたとき，上の観察から，平面的にくっつかなければばなりません．これがどの点においてもそうですから，双曲放物面，１葉双曲面は丸めていないただの紙だという事になります．これは明らかに事実と反します．

ここまでの話では，双曲放物面，１葉双曲面を主役にして進めてきました．これらは，可展曲面ではなく，各点を２本の直線が通る曲面と言う性質を持つことを説明しましたが，実は，**そのような性質を持つどんな曲面も，双曲放物面，１葉双曲面の一部を貼り合わせて得られる**ということが分かります．この意味で，双曲放物面，１葉双曲面は，２次曲面という比較的簡単な曲面なのですが，普遍性を持っていることが分かります．

しかし，この話は別の機会に譲ることにして[4]，可展曲面の話を続けることにします．

1.2　まっすぐだと思ったらトゲがあった …

可展曲面も２次曲面に限っては，柱面とコーンしかなくて，意外性がありませんから，この後は，２次曲面という制約は外して考えることにします．ここで，可展曲面の組織的な作り方をお教えしましょう．紙に，**交わらないよう**直線をたくさん引きます．これは直線の集まりですから，**直線族**と呼ぶことにします．ここで，あえて，その直線にそって紙を折り丸めてみます．出来た曲面は尖っていますが，もっと直線をたくさん引けば，どんどんなめらかな曲面に近づきます[5]．直線族を与えても，山折り谷折り，それからどのような角度で曲げるかによって，得られる曲面は変わってきますが，ともかくこのようにして可展曲面は得られます．

ここまでは，範囲の限られた紙の話です．今，紙に描いた直線（正確にはその一部なので線分）をどんどん伸ばしていったらどうなるでしょうか？このように考えると，柱面とコーンの他に，**第３の可展曲面**が自然に得られます．これがこの講の最後の主役です．まず，どんどん伸ばしていっても，直線が交わらない場合ですが，この場合は，まさに得られる曲面は柱面です．次に，伸ばしていくと，すべての直線が一つの点で交わる場合，このときはコーンが得られます．残る場合というのは，伸ばしていくと，すべての直線が交わるけれども，その交点が異なる場合です．こ

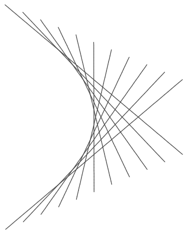
[3]従って線織面でも可展曲面とは限らないのです．

[4]興味がある人は，参考文献 [メビウス, １６講] をぜひ読んでみてください．

[5]円を正多角形で近似するのと似た考え方です．

の場合，次のように，ある曲線が浮かび上がってきます．それは，直線たちが接している曲線です．

包絡線

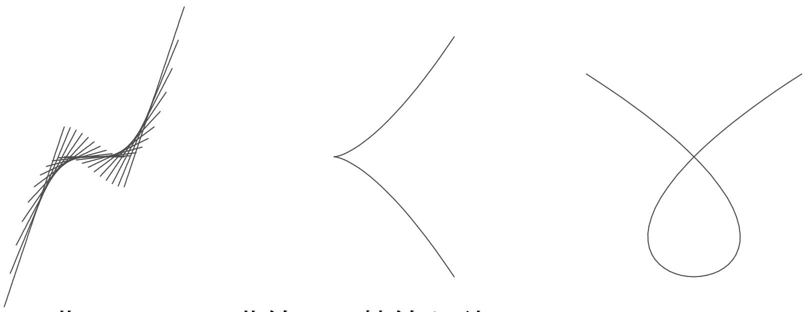


このように直線族が与えられたとき，それに属するすべての直線が接する曲線を**包絡線（ほうらくせん）**と呼びます．

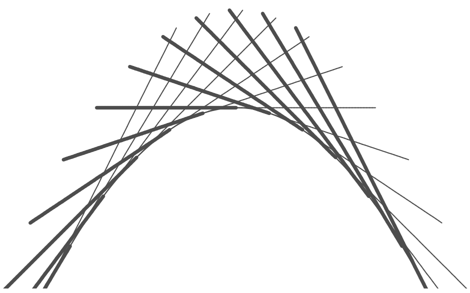
逆に曲線を与えて，その接線を考えれば，その曲線を包絡線に持つ直線族が得られます．手始めに凸（とつ）に曲がっている曲線を考えましょう．これを C と呼ぶことにします．これは，別の言い方をすれば，特異点も変曲点を持たない曲線です．ここで，曲線の**特異点**とは，曲面のときと同様，尖っていない点のことです．言い換えれば，どんなに虫眼鏡で拡大して見ても，直線には見えない点のことです．また，曲線の特異点ではない点が**変曲点**とは，接線の傾きが，そこで，減少から増大へ，あるいは，増大から減少へ変わる点のことです．

様々な曲線

変曲点を持つ　　**特異点を持つ**



凸（とつ）に曲がっている曲線 C に接線を引いてみます．



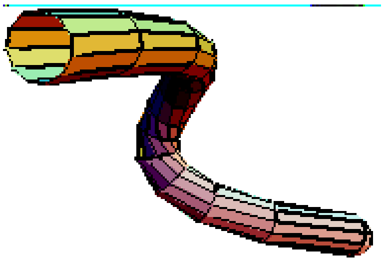
　このとき，図のように，各接線を太い部分と細い部分に分けておきます．すると，異なる接線の太い部分同士，細い部分同士は直線たちは交わりません．丁度，細い部分は，曲線に巻きつけていた糸をほどいていく感じ，太い部分は，逆に糸を巻きつけていく感じです．この図を見てなんとなく曲面が浮かび上がってきませんか？実際に曲面を実現するため，同じ図を描いた紙を二枚用意し，一つには太い部分のみ，もう一つには細い部分のみ描いておきます．それぞれの部分を丸めることで二つの曲面が得られますが，このとき，曲線 C を空間に持ち上げて得られる曲線が同じになるようにしておきます．この空間曲線を D と呼びましょう．二つの曲面は D を境界に持つので，D に沿って貼り合わせることができます[6]．描いた両方の種類の直線は空間の直線に持ちあがりますが，もともと曲線 C の接線ですから，丸めて曲面にした後も直線は D に接しています．つまり，空間において，D は直線族の包絡線になっているのです．得られるのは，D に沿ってトゲのある（尖った）曲面なのです．ところが，注目すべきは，曲面は尖っていても，**直線の太い部分と細い部分は，紙を曲げた後でも，ともに（特異点を持たない）曲線 D に接していますから，折れ線ではなく，ちゃんと直線になっているということです．** まっすぐなものが動いていって尖ったものが出来ると言うのはとても不思議なことですね．このようにして，包絡線を持つ平面の直線族から定まる可展曲面のことを**接線曲面**と言います．

接線曲面の例

　曲面が尖っているというのを式を使って確認してみましょう．そのため，空間曲線 D を具体的に式で与えてその接線たちによって作られる曲面を考え，その式を求めてみましょう．D として (t, t^2, t^3) というパラメーター表示を持つ曲線を考えることにします．これは**ねじれ３次曲線**と呼ばれる空間曲線で，平面内の凸な曲線を持ち上げたものになっています．

[6]得られる曲面は，もちろん，一つの紙を丸めてできる曲面ではありませんが，コーンと同様，そのような曲面を二つ貼り合わせたものです．

ねじれ３次曲線



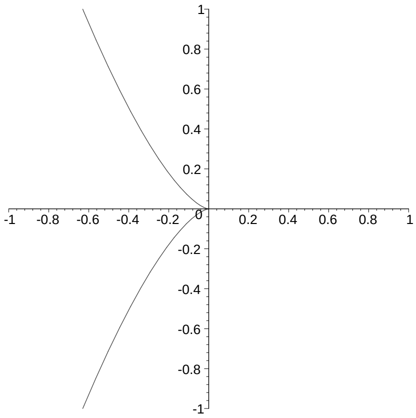
ねじれ３次曲線の点 $P = (t, t^2, t^3)$ における接線のパラメーター表示を求めてみましょう．ねじれ３次曲線の上の別の点 $Q = (s, s^2, s^3)$ を取ります．Q を P に近づけたとき，直線 PQ が近づく直線が P での接線です．そのため，まず，直線 PQ のパラメーター表示を求めます．P を原点に移すと，Q は $R = (s - t, s^2 - t^2, s^3 - t^3)$ に移ります．直線 OR 上には，R の座標を一斉に $s - t \neq 0$ で割って得られる点 $(1, s + t, s^2 + st + t^2)$ が乗っていますから，OR は $(u, u(s + t), u(s^2 + st + t^2))$ とパラメーター表示できます（文字がたくさん出てきて複雑ですが，u だけが動くパラメーターです．今は，s, t は止めて考えています）．よって，PQ は，$(u + t, u(s + t) + t^2, u(s^2 + st + t^2) + t^3)$ とパラメーター表示されます．ここで，Q を P に近づけると（つまり s を t に近づけると），PQ は，

$$(u + t, 2ut + t^2, 3ut^2 + t^3) \tag{1}$$

とパラメーター表示される直線に近づきます．これが，ねじれ３次曲線の点 $P = (t, t^2, t^3)$ における接線のパラメーター表示です．

ここで，u だけでなく t も動かしましょう．t, u を両方動かすときに得られる点の集まりが，まさに D の接線が描く曲面です[7]．以下，式 (1) を曲面のパラメーター表示と見なしましょう．このパラメーター表示を用いて，D の接線が描く曲面が D に沿って尖っていることを確かめてみましょう．そのためには，この曲面を D に直交する平面で切断して断面を見てやればよいのです．実は，D のどの点でも事情は同じなので，$(0, 0, 0)$ で考えましょう．ここにおいて，D の接線は $(u, 0, 0)$（x 軸）ですから，これに直交する平面は yz 平面，つまり $x = 0$ を満たす点の集まりです．式 (1) において，$x = 0$ とすると，$u + t = 0$ となりますから，yz 平面による断面は，$(y, z) = (-t^2, -2t^3)$ なるパラメーター表示を持つ図形です．これは図のように原点で尖った曲線になります[8]．

[7] ２つのパラメーターがあるので，２次元の図形（曲面）が得られるというわけです．
[8] 尖った曲線の典型例．



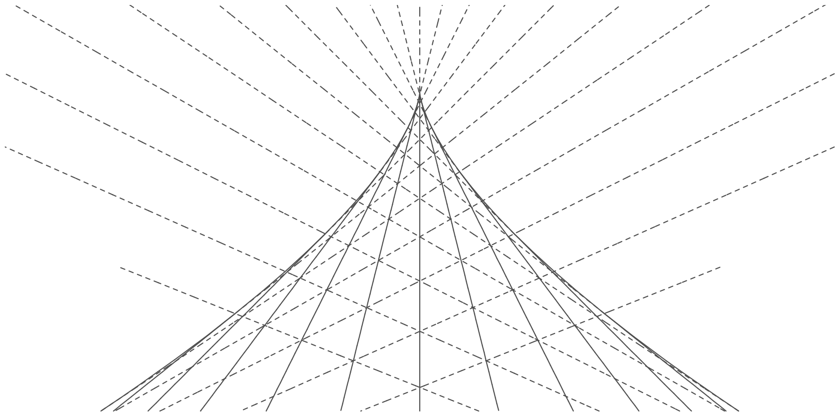
$(y, z) = (-t^2, -2t^3)$ **なるパラメーター表示を持つ曲線**

参考文献 [J] も見てみるとよいでしょう.

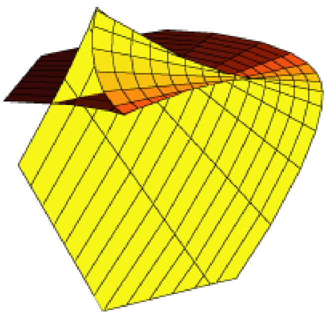
1.3　そこまでトンガラなくても …（ツバメの尾）

最後に，もっと尖った曲面の例を与えておきましょう．上では，平面において，凸な曲線を考え，接線族から出発して尖った曲面を作りました．このときは，直線を，太い部分と細い部分に分けて，各々が作る曲面を貼り合わせて尖って曲面を作ったのでした．平面曲線が上図のように，変曲点を持っていたり，自己交叉を持っていたりすると，もっといくつかの曲面を貼り合わせなくてはなりません．

ここに，今一つ，貼り合わせを理解しやすい例を与えます．それは，すでに上で例として出てきた尖った曲線の仲間– (t^2, t^3) なるパラメーター表示を持つ曲線–の接線族から出発して作られる曲面です．この曲線の原点は特異点ですが，変曲点は持ちません．上で考えた凸な曲線の時と同様，接線を，図の通り点線と実線に分けて，各々が作る曲面を貼り合わせれば，やはり尖った曲面が得られます．



ただし，この場合は，実線部分，右の点線部分，左の点線部分と，三枚の紙を用意して貼り合わせる必要があります．これが寺杣先生が作成したツバメの尾です．上で考えた凸な曲線の時と事情が違うのが，曲線の尖がりに対応するところです．参考文献 [J] も見てみるとよいでしょう．



参考文献

[メビウス] フックス・タバチニコフ著（蟹江幸博訳）『メビウスの作った曲面』（岩波書店）（数学の玉手箱のような本．３巻本の２冊目．第１弾『ラマヌジャンの遺した関数』の第８講にもツバメの尾が登場．少し難しめかもしれません.）

[難波] 難波誠著『平面図形の幾何学』（現代数学社）（初等幾何の面白い話題の宝庫．円錐曲線の話題も豊富.）

[J] P. H. Johansen,『The geometry of the tangent developable』（インターネットで入手可能．英語の論文ですが，尖った曲面のきれいな図がたくさん描かれています．ツバメの尾は，p.100 の上から第２図です.）