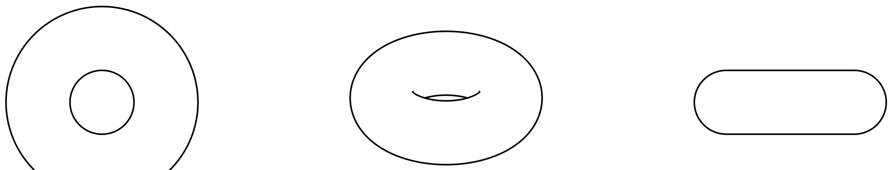
高校生のための現代数学講座　　東京大学
「曲面の不思議」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　吉野　太郎　　2013 年 7 月 13 日

「ビニール浮き袋の形」

• 浮き輪の絵を描いてみよう

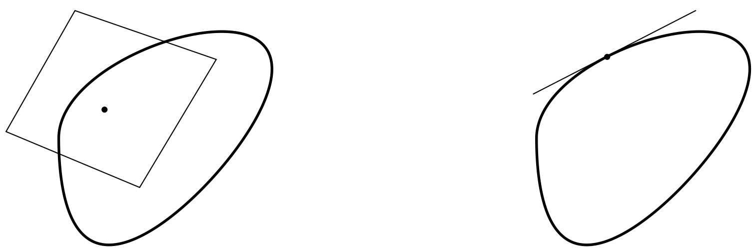
下図は、浮き輪を三通りの角度から見たときの絵である。このような浮き輪の輪郭はどのような曲線になるのか考えてみよう。



真上から　斜めから　真横から

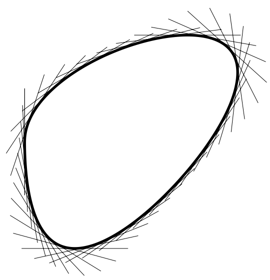
• 曲面の輪郭

まず、(浮き輪の形とは限らない) 一般の曲面の輪郭の形はどのように決まるのか考える。 空間内に曲面があるとき、曲面上の一点を選ぶと、その点における接平面を描くことが出来る。但し、選ぶ点の位置によっては、接平面が直線に見えてしまうこともある。このように、直線に見える接平面を**退化した接平面**と呼ぶ。

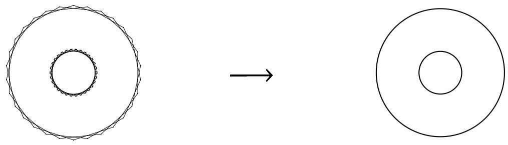


(普通の接平面)　(退化した接平面)

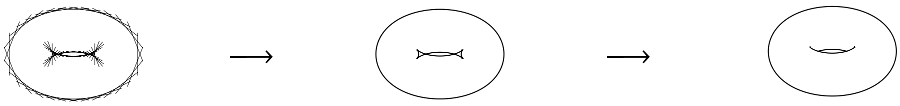
一つに曲面に対し、退化した接平面を全て描くとどうなるだろうか。実は、このとき下図のように輪郭線が自然と浮かび上がる。



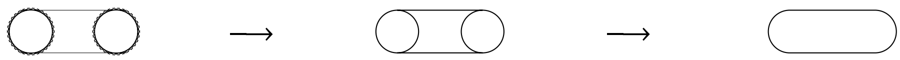
このことを利用して、浮き輪の輪郭を描けるか考えてみよう。



真上から見たとき　(きれいに描き直す)



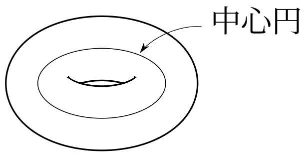
斜めから見たとき　(きれいに描き直す)　(見えない部分を消す)



真横から見たとき　(きれいに描き直す)　(見えない部分を消す)

このように、退化した接平面さえ描ければ、輪郭線を描けることが分かる。

しかし、退化した接平面がどこに現れるのかが分からなければ、結局は輪郭の曲線を描くことが出来ない。浮き輪の空気の入る部分の真ん中部分を結ぶと円が描ける。これを中心円と呼ぼう。

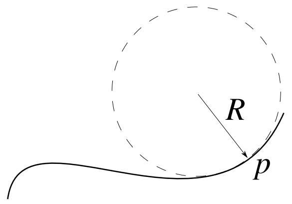


中心円は、正面から見れば円だが、上図のように斜めからは楕円に見える。少し考えると、退化した接平面は等距離のところに現れる事が分かる。従って、中心円 (楕円) から等距離分離れたところに引かれる曲線が浮き輪の輪郭線となる。これがど

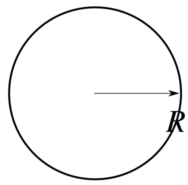
のような曲線になるのか考えてみよう。そのためには**曲率半径**という概念が重要になる。

• 曲率半径

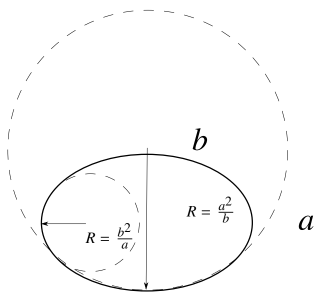
曲率半径とは、曲線の曲がり具合を表す値である。曲線上の点 p において曲率半径が R であるとは、p において曲線の曲がり具合が半径 R の円に等しいことを言う。



曲率半径が一定値 R の曲線は円弧となる。

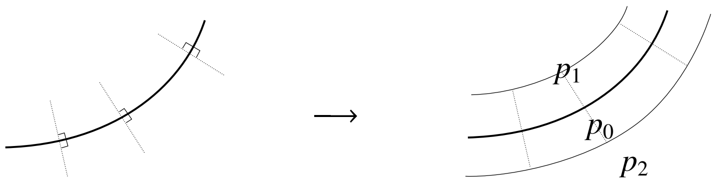


一方、円弧以外の曲線は、各点ごとに曲率半径が異なる。例えば長半径が a、短半径が b の楕円の場合、最も急カーブな部分の曲率半径は b^2/a、最も緩いカーブの部分の曲率半径は a^2/b であることが知られている。



ここで、曲率半径が小さいほど、曲がり具合が大きく (きつく)、曲率半径が大きいほど、曲がり具合が小さい (緩い) ことに気をつけよう。

さて、今ある曲線が描かれており、その曲線から一定の距離 ℓ だけ離れたところに別の曲線を描くことを考えてみよう。



(p_1 における曲率半径)=(p_0 における曲率半径)-ℓ

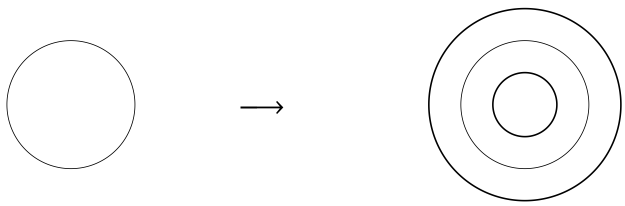
(p_2 における曲率半径)=(p_0 における曲率半径)+ℓ

このとき、図のように、内側の曲線はよりカーブがきつく、外側の曲線はよりカーブが緩くなる。これにより、内側の曲線の曲率半径は ℓ だけ減り、外側の曲線の曲率半径は ℓ だけ増える。

• 浮き輪の輪郭の曲線

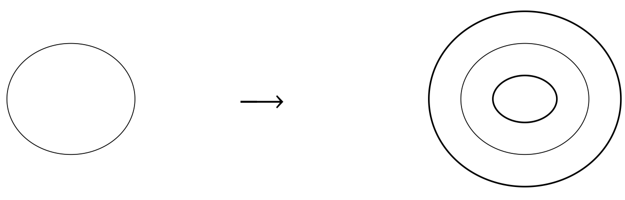
今まで考えてきたことを参考に、浮き輪の輪郭がどのような曲線になるか考えてみよう。

(1) **真上から見たとき:** 中心円は円になる。この半径を r とする。浮き輪の輪郭はここから両側に一定距離 ℓ だけ離れた曲線であるから、結局、半径 $r-\ell$ と $r+\ell$ の円が輪郭線となる。

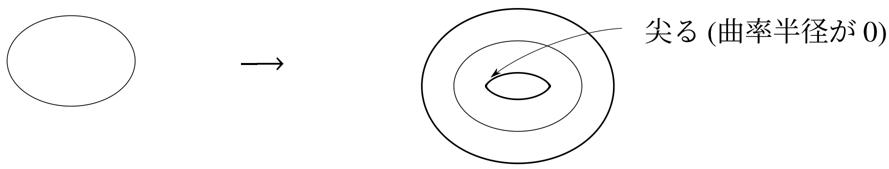


次に同じ浮き輪を角度 θ から見た場合を考えよう。このとき中心円は、長半径 r、短半径 $r\sin\theta$ の楕円となる。

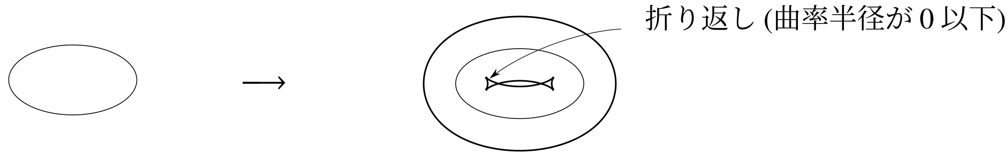
(2) **θ が $\pi/2$ に近いとき:** 中心円は少しだけ縦につぶれ、輪郭は次のようになる。



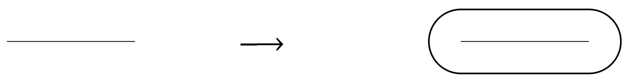
(3) **$r\sin^2\theta = \ell$ のとき:** 中心円の最も急な部分の曲率半径が ℓ に一致するため、内側の輪郭には曲率半径が 0 の部分が現れる。



(4) θ **がさらに小さくなると:** 内側の曲率半径がマイナスになり、折り返しが発生する。



(5) $\theta = 0$ **のとき:** 中心円は完全につぶれる。従って、輪郭は半円と線分の組み合わせになる。



これで、浮き輪をさまざまな角度から見たときに、その輪郭がどのような曲線になるのかを理解することが出来た。