高校生のための現代数学講座　　東京大学
「曲面の不思議」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　高木　寛通　　2013 年 7 月 13 日

「２次曲面と線織面」

1　はじめに

第１講で，円錐から，楕円（円を含む），放物線，双曲線を切り出せることを見ました．そのため，これらの曲線を**円錐曲線**と呼ぶのでした．さらに，座標を導入することにより，円錐曲線は，(x, y の２次式)=0 を満たす点の集合であることも見ました．また，円錐曲線を回転させることで曲面を作りました．これらは (x, y, z の２次式)=0 を満たす点の集合になるので**２次曲面**と呼ばれます．

私の講義（この講義と次回第１講）では，この２次曲面を違った角度から眺めることから出発して，

みかけはまがっているがとんだまっすぐなめんだ

という話をしたいと思います[1]．

理解度のチェックのため，いくつか問題も出しておきましたので，解いてみてください．さらに興味を持った人は，次回第１講のテキストの最後に参考文献を挙げておきましたから，読んでみるとよいでしょう．

次回第１講では，紙を折ることなく丸めてできる曲面（**可展曲面（かてんきょくめん）**と言います）が主役になります．いろいろ紙を丸めてできる曲面を見ながら話を聞いてもらおうと思います．最後に「**ツバメの尾**」という曲面が出てきますが，そのペーパークラフトを第１講を担当された寺杣友秀氏が作成しました[2]．もし，余裕があれば，次回の講義を受ける前に自分で組み立ててみてください[3]．

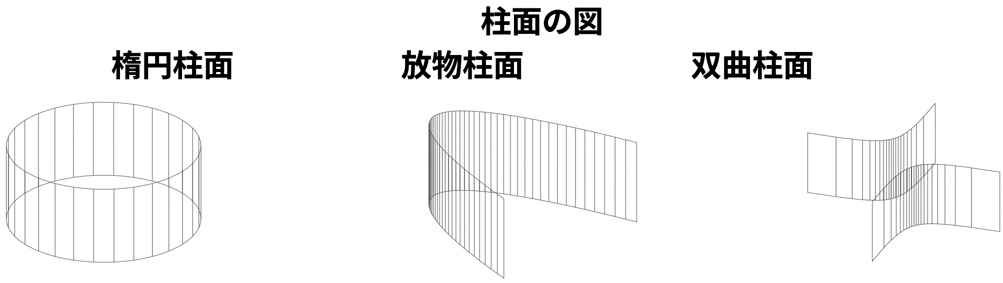
2　２次曲面についての補足

第１講で作った２次曲面は，**円錐**，**回転楕円面**，**回転放物面**，**１葉双曲面**，**２葉双曲面**という回転面，それから,「馬の鞍（くら）」である**双曲放物面**です（第１講を参照）.

[1]参考：歌川国芳画「みかけハこハゐがとんだいい人だ」
[2]http://gauss.ms.u-tokyo.ac.jp/misc/toys.html
[3]完成したものは，私が持参しますので（かさばりますから）持ってくる必要はありません．

少し 2 次曲面の例を追加しておきましょう．まず，円錐曲線を底とする柱面も 2 次曲面です：

$$
\begin{aligned}
\text{楕円柱面} &: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \ (a, b > 0) \\
\text{放物柱面} &: \quad y - ax^2 = 0 \ (a > 0) \\
\text{双曲柱面} &: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \ (a, b > 0)
\end{aligned}
$$



これらは，円錐曲線と同じ式で表示されていますが，ここでの変数（座標）は x, y だけでなく（式には出てきませんが）z もあることに注意します（z にはなんの制約もないので式に出てこないのです）．

さらに，円錐の仲間ですが，次のような**錐**も 2 次曲面です[4]：

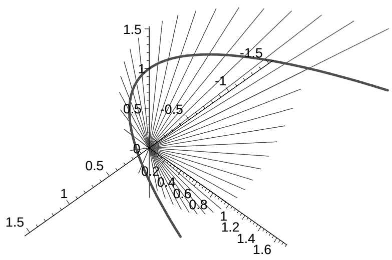
$$
\begin{aligned}
\text{放物錐} &: \quad zy - x^2 = 0 \\
\text{双曲錐} &: \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0
\end{aligned}
$$

これらの式は円錐曲線の式から次のように得られます．放物線を例に取りましょう．放物線 $y - x^2 = 0$ を空間の中で $z = 1$ という平面上に置きます．コーンは，原点とこの放物線の点を結ぶ直線によって描かれる曲面に他なりません．よって，逆に考えれば，点 (p, q, r) $(r \neq 0)$ がコーンの上にあるという事は，この点と原点を結ぶ直線が，平面 $z = 1$ と交わる点–これは $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, 1)$ です–が，放物線上にある，ということです．つまり $\frac{q}{r} - (\frac{p}{r})^2 = 0$ という事です．この分母を払って，p, q, r を x, y, z で置き換えた式が放物錐の式です．実は，$r = 0$ の場合，少し注意しなくてはならないのですが，この点は以下の図を見ながら説明します．

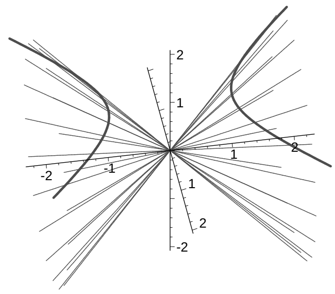
[4]アイスクリームの**コーン**を思い浮かべてください．以下，コーンと呼ぶことにしましょう．

コーンの図

放物錐



双曲錐

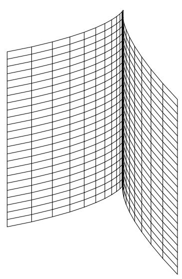


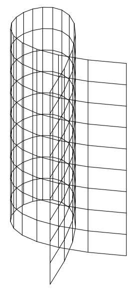
問題 1. 双曲錐の式を自分で導いてみましょう.

結局，これらは，円錐を座標空間に違った置き方をしたものです.

コーンは，他の２次曲面とは違った性質を持っています．それは「**尖った点を持っている**」（原点です）という事です．このような尖った点のことを**特異点**と呼びます．別の言い方をすれば，その近くでどう曲面を拡大してみても平面には見えない点のことです.

色々な特異点の例





特異点を持った面は曲面と呼ばない流儀もありますが，私の話では曲面に入れておきます．というのは，後に,「**尖っていない曲面でも，ずっと伸ばしていくと尖っている所が出てくる**」ことを見るので[5]，尖ったものも仲間に入れておくのが自然だからです．こうすることで，次回第１講の最後にもっと複雑な特異点の例が出てきます（**ツバメの尾**）．なお，コーンもそのような見方の出来る曲面です．実際，コーンを，$z = 1$ 上にある円錐曲線を，原点に向かって縮めながら動かして得られると見ると，ついに原点で尖ってしまうと見ることが出来ます.

[5]「みかけはまがっているがとんだまっすぐなめんだ」に続きがあって「でもとがっていた」というオチが付くと言うわけです.

3　２次曲面を違った角度から眺めてみよう

3.1　線織面

円錐に限らず，２次曲面を様々に切ってみると，たくさんの円錐曲線が断面として得られます．これは２次曲面の ‘曲がった一面’ です．このあとは,「みかけはまがっているが ⋯ 」という観点から２次曲面を眺めることにしましょう．正確にいうと，たくさんのまっすぐな線，つまり，直線を含んでいる２次曲面とそうでないものに分けてみます．名前を導入しておきましょう．２次曲面に限らず，曲面 S が**線織面（せんしょくめん）**であるとは，**S のどの点 s についても，s を通り S に含まれる直線が存在する**ということとします.「（直）線が織りなす曲面」というとても美しい名前の曲面です．上で挙げた２次曲面は，線織面であるものとそうでないものに分けられます.

まず，すぐに線織面であることが分かるものがあります．どれでしょうか?それは,私がこの講義で付け加えた柱面とコーンです（それらの図を参照してください)．これらは，どちらかというと「みかけもまっすぐ」ですから，これだけが線織面なのであれば，話としてはあまり面白くはありませんが，答えは次のようになっています.

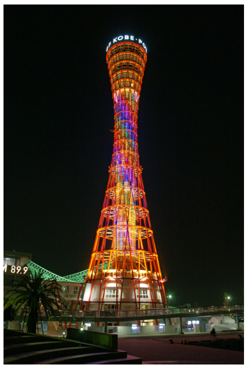
線織面である２次曲面

線織面である２次曲面は，柱面，コーンに加えて，**双曲放物面**，**１葉双曲面**である.

実は，より詳しいことも分かって，これら以外の２次曲面は，直線を一つも含みません．このことは後で問題として出しておきますから，皆さんで確認してみてください.

双曲放物面，１葉双曲面がこの第２講の主役です．１葉双曲面については，たくさんの直線を含んでいるというのがピンと来る人がいるかもしれません．実は１葉双曲面は私たちの身近にあふれているのです．おうちに以下のような籐細工の椅子を持っている人はいませんか?あるいは，神戸にお出かけの際，神戸ポートタワーに上った人はいませんか?古典芸能に詳しい人は，能や狂言で「よーおう」と言う掛け声とともに「ポン」といい音を出す楽器を想像するかも知れません．皆さんが，座ったり，登ったり，叩かれるのを見たりしているあの曲面，それが１葉双曲面です.

曲面たち



ここで，この後の話で重要となってくる観察をしておきましょう．それは,「**１葉双曲面の各点を丁度，２本ずつの直線が通っている**」ということです.

双曲放物面は，あまりお目にかかったことはないかもしれませんが，馬の鞍に似ています．でもそれでは，たくさんの直線を含んでいるという理解の助けにはなりません．幸い，ここに竹ひご細工があって，たくさんの直線を含んでいることは一目瞭然です．そして，さらに，双曲放物面の各点も丁度，２本ずつの直線が通っていることが分かります.

3.2　式の活躍

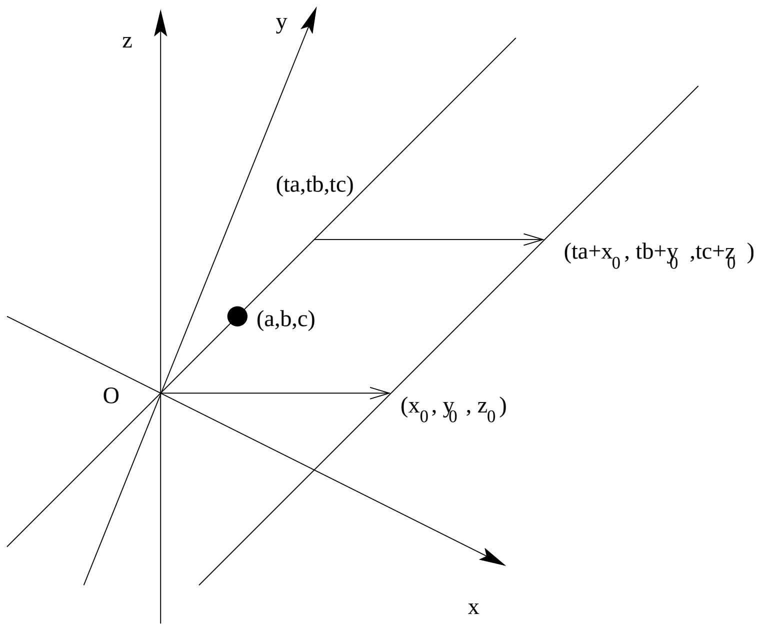
実は，前節で「１葉双曲面，双曲放物面の各点を**丁度**，２本ずつの直線が通っている」と言いましたが，それは少し勇み足なのです．確かに，この竹ひご細工を見れば，各点を２本ずつの直線が通っていることは分かりますが，**それ以外に通っていないことまでは分かりません**．これをはっきりさせるためには，１葉双曲面，双曲放物面の方程式が役に立つのです.

先に進む前に，空間において，直線を式で捉える方法（直線のパラメーター表示）を説明しておきます．l を空間内の直線としましょう．まず l が原点を通っている場合ですが，このとき，l 上の原点とは異なる１点 $P_0 = (a, b, c)$ を選ぶと，l は，原点から見て，P_0 と同じ方向，あるいは逆の方向の点全体の集まりです．これを式で書くと，l は (ta, tb, tc)（t は実数）という点の集まりということです．t を動かすと l が描けると言うわけです．l が必ずしも原点を通っていない場合，l 上の１点 (x_0, y_0, z_0) を選んでおきます．この点を原点に平行移動して得られる直線は，今説明した通り，その上の点 (a, b, c) を用いれば (ta, tb, tc)（t は実数）という点の集まりですから，もともとの l は

$$(ta + x_0, tb + y_0, tc + z_0) \tag{1}$$

という点の集まりです．

空間の直線



これを l の**パラメーター表示**，t を**パラメーター**と言います[6]．

さて，１葉双曲面 $x^2+y^2-z^2-1=0$–これを S と呼ぶことにします– について，S の上にある直線を求めてみましょう．曲面 S のよいところは，S が z 軸に関する回転対称性を持つということです（第１講で説明のあった回転面です）[7]．この回転対称性を利用した解答を与えておきます．

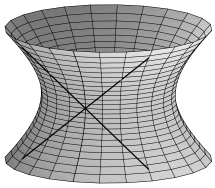
解答

S の xy 平面に平行な切り口は円だから，S は xy 平面に平行な直線は含まない．よって，どんな直線も xy 平面と交わる．そこで，回転対称性より，$(1,0,0)$ を通る直線を求めれば，あとの直線はすべて，それを z 軸の周りをぐるぐる回せば得られる．$(1,0,0)$ を通る直線は $(x,y,z)=(at+1,bt,ct)$ とパラメーター表示できる．これを $x^2+y^2-z^2-1=0$ に代入すると $(at+1)^2+(bt)^2-(ct)^2=1$. 整理して，$(a^2+b^2-c^2)t^2+2at=0$. 直線

[6]一つ付け加えておくと，パラメーター表示は一通りでなく，(x_0,y_0,z_0) や (a,b,c) を取り替えると代わります．例えば，(t_1,t_1,t_1+1) も (t_2+1,t_2+1,t_2+2) も $(2t_3+1,2t_3+1,2t_3+2)$ も同じ直線を表しています（t_1,t_2,t_3 がそれぞれのパラメーターです）．問題に応じて，都合のよいパラメーター表示を取るのがよいのです（これは以下で一例を見ることになります）．受験にも役に立つかもしれませんね．

[7]籐の椅子，神戸タワーなどは，サイズは違いますが，みなこの例になっています．詳しくは次ページで説明します．

が S に含まれるという事は t をどんな実数にとっても，この式が成り立つということである．よって，$a^2+b^2-c^2=0$, $2a=0$ でなくてはならない．こうして $a=0$, $c=\pm b$ が分かった．ところが $(0,b,b)$ $(b\neq 0)$ を用いても $(0,1,1)$ を用いても同じ直線の（異なる）パラメーター表示を与える．$(0,b,-b)$ $(b\neq 0)$, $(0,1,-1)$ についても同様．よって，$(1,0,0)$ を通る直線は，パラメーター表示で書くと，$(1,t,t)$ と $(1,t,-t)$ の２本．



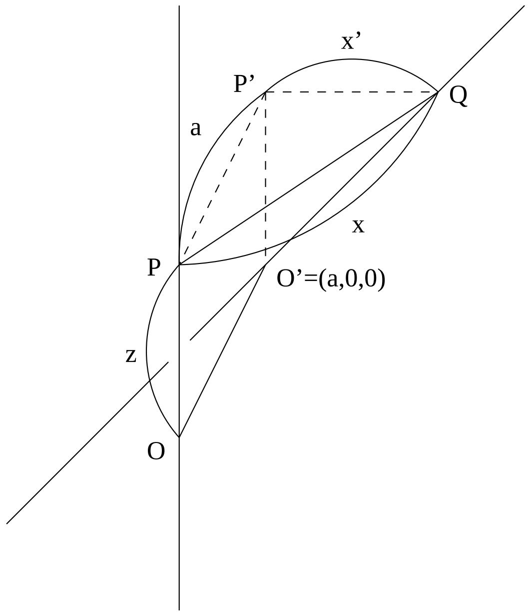
問題 2. 双曲放物面 $z-x^2+y^2=0$ の上にある直線をすべて求めてください[8]．各点を丁度２本の直線が通ることを確認しましょう．

問題 3. 柱面，コーン，双曲放物面，１葉双曲面以外の２次曲面（回転楕円面，回転放物面，２葉双曲面）は，直線を含まないことを，式を用いて示してみましょう．

なお，http://www.sci.u-toyama.ac.jp/topics/topics33.html の「曲面の近似」の節で，双曲放物面，１葉双曲面の直線の様子がアニメーションで見られます．

ところで，籐の椅子や神戸ポートタワーが１葉双曲面だと上で述べましたが，実ははっきり確かめたわけではありません．単に，籐の椅子や神戸ポートタワーが，空間にある直線をある軸の周りにぐるっと回転させて得られるという性質を，１葉双曲面と共有しているという事を観察しただけです．ここでは，実際，空間にある直線をある軸の周りにぐるっと回転させて得られる曲面（籐の椅子という事にします）が１葉双曲面であることを確認しておきましょう．このためには空間の座標をうまくとっておく必要があります．まず籐の椅子の中心線が z 軸になるようにします．籐の椅子の上にある一つの直線 l に注目します．l と籐の椅子の中心線（z 軸）はねじれの位置にあります．この共通垂線と z 軸の交点を原点に選びます．そして，共通垂線と l の交点が x 軸上になるように x 軸を選びます．その交点の座標は $(a,0,0)$ と書けます．y 軸は自然に決まります．l のパラメーター表示は (a,t,tb) $(b\neq 0)$ と書けます．これをぐるっと z 軸の周りで回転させて得られる曲面上の点は，第１講の回転体の式の求め方から分かるように，$x^2+y^2=a^2+t^2, z=tb$ と書けます．これからパラメーター t を消去すれば，$x^2+y^2=a^2+(\frac{z}{b})^2$ となって，１葉双曲面の式が得られました．$a=b=1$ の場合が上で考察した S です．講義では，次の図を使ってもっと図形的な説明もします．

[8]双曲放物面の場合は，１葉双曲面とは違って，特別な点を選ばなくても，任意の点 (x_0,y_0,z_0) を通る直線の式をきれいに求めることが出来ます．



上図で OO' が共通垂線です．P が変わっても $\Delta P'O'Q$ は相似な直角三角形なので，z と x' の比は一定です．そこで $z = bx'$ とおきます．