高校生のための現代数学講座　　東京大学
「曲面の不思議」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　寺杣　友秀　　2013 年 7 月 13 日

「立体図形と曲面」

　今回の現代数学講座では身近に現れる曲面についていくつかの視点から考察をして、その意外な側面を紹介しよう。まず始めのこの講義では、空間図形を扱うための言葉などを準備して、その典型的な曲面の例を紹介する。空間図形を考える前に、平面図形とくに曲線について、その性質をもう一度振り返ってみることにしよう。

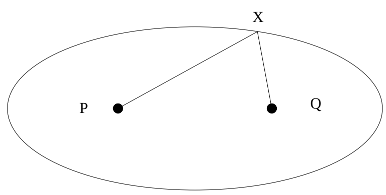
1　平面図形の復習

平面上図形で一番の基礎となるのは直線である。二つの点を結ぶ（無限に伸びた）直線はただ一つだけある。二つの点を端とする直線の一部は線分と呼ばれ、その長さを用いて、二つの点の距離が定まる。2 点間には距離が定まることをもちいて、円という図形が定義できる。

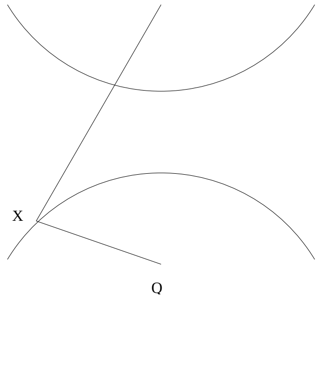
定義 1.1 平面上の点 O と長さ r が与えられたとする。このとき O からの距離が r となる点 X の集合を円という。このとき O を中心、r を半径という。

長さを使って定義される図形として他に代表的なものとして、楕円と双曲線がある。

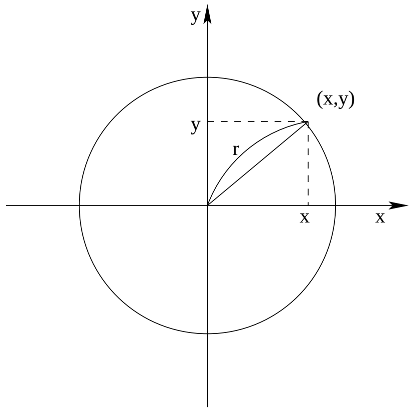
定義 1.2
1. **楕円** 平面上の 2 点 P,Q と長さ r が与えられた時、PX の長さと QX の長さ和が $2r$ となる点 X の集合を P,Q を焦点とする楕円という。（ただし $2r$ は PQ 間の長さより大きくなくてはならない。）



2. **双曲線** 平面上の 2 点 P,Q と長さ r が与えられた時、PX の長さと QX の長さの差が $2r$ となる点 X の集合を P,Q を焦点とする双曲線という。（ただし $2r$ は PQ 間の長さより小さくなくてはならない。）



この様に定義をするのでは余り複雑なものは扱いにくい。さらに詳しい性質を調べるには、平面に座標を導入するのがよい。平面の座標は、どの位置に、またどの方向にとってもよい。例えば下の図のようなものである。



このとき２点 (x_1, y_1),(x_2, y_2) の間の距離 r は三平方の定理から、

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

と表されるので、原点 $(0, 0)$ を中心として半径を r とする円上の点 (x, y) は

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

という式を満たさなくてはならない。またこの式をみたす x, y に対して点 (x, y) は円上の点となる。言いかえれば、式 *(1)* はこのような円の方程式である。

それでは、今度は楕円の方程式を求めてみよう。方程式は座標の取り方によって変わってしまうが、座標を $P = (a, 0), Q = (-a, 0)$ となるようにとる。もとめる楕円上の点を (x, y) とすると、楕円の方程式は

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2r$$

となる。両辺を２乗して

$$(x-a)^2 + (x+a)^2 + 2y^2 + 2\sqrt{((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2)} = 4r^2$$

となる。式を整理して、

$$2r^2 - (x^2 + y^2 + a^2) = \sqrt{((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2)}$$

$$(2r^2 - (x^2 + y^2 + a^2))^2 = (x^2 + y^2 + a^2 - 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)$$

$$4r^4 - 4r^2(x^2 + y^2 + a^2) = -4a^2x^2$$

$$r^2(r^2 - a^2) = (r^2 - a^2)x^2 + r^2y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2}$$

という方程式が変形できる。ここで $r > a$ である。教科書では楕円の定義として、このような方程式を採用しているものも多いだろう。このように座標を導入することにより、図形を式で扱えるようになる。

双曲線についても同様に方程式を求める事ができる。$\overline{PX}$ と $\overline{QX}$ の差が $2r$ であるということから、

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}-\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\pm 2r$$

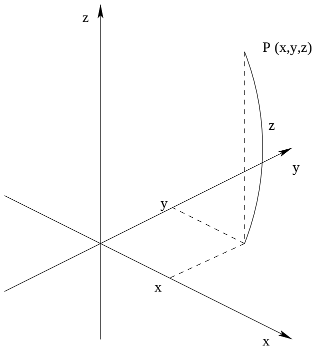
なる方程式がえられる。上と同様の変形を行えば、

$$1=\frac{x^2}{r^2}-h\frac{y^2}{a^2-r^2}$$

なる方程式が得られる。ここで $r<a$ である。

2　座標空間

空間図形で扱うものは、曲線のほかに面的な広がりをもつ曲面がある。曲面のうちで一番単純なものは平面である。２点間の距離が平面図形と同様に定義できて、それを使うと、球面が定義できる。球面の定義を正確にいえば、次のようになる。空間上の点 O と長さ r が与えられた時、O からの長さが r となる点 P の集合を球面という。平面図形と同様に、空間図形でも図形の性質を証明するときに座標を用いると便利なことが多い。空間座標を一つとれば、空間内の１点 P は座標 (x,y,z) で表すことができる。



文章で説明すれば次のようになる。例えば P の x 座標は P を通る YZ 平面に平行な面を考え、これと X 軸の交点の座標として求められる。従って、２点間の距離に関する三平方の定理を用いれば、原点を中心として半径 r の球面は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

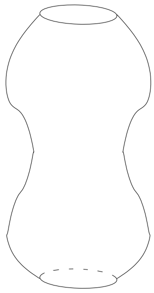
となる。

3　曲面の作り方、回転面

一つの直線 L とその直線を含む平面上の曲線 C を考える。C を L の周りに回転させて得られる図形を回転面という。空間座標を適切にとり、XZ 平面上の曲線を Z 軸の周りに回転させて得られる場合を考えればよい。さらに曲線が

$$x=f(z)$$

で与えられる場合を考える。



回転させて得られた図形上の一点 $P=(x,y,z)$ とする。回転して XZ 平面上にのるようにすると、その座標は $(\sqrt{x^2+y^2},z)$ となるので

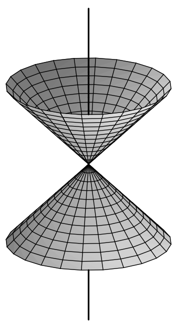
$$|f(z)|=\sqrt{x^2+y^2}$$

なる条件を満たさなくてはならない。いろいろな平面図形について $f(z)$ がわかっているので、これからたくさんの曲面の方程式の例が作れる。

例 3.1 円錐　a を 0 でない実数として $x=az$ を回転させると $\sqrt{x^2+y^2}=|az|$ が円錐の方程式である。両辺を２乗して、

$$x^2+y^2=a^2z^2$$

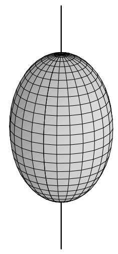
なる方程式をえる。ある角度だけ回転した直線は円錐に含まれる。この直線は円錐の母線という。頂点以外の点はただ一つの母線に含まれる。従って、円錐はたくさんの直線を含む。



例 3.2 回転楕円面 XZ 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ を z 軸について回転させてできる回転面の方程式は

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

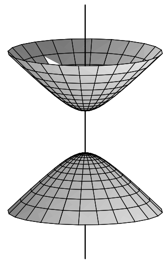
となる。これはラグビーボールの形で回転楕円面と呼ばれる。



例 3.3 二葉双曲面, 一葉双曲面　双曲線 $x^2 = z^2 - 1$ を Z 軸の周りに回転させて得られる図形

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

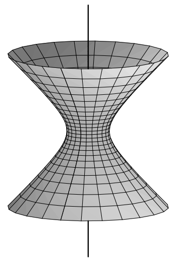
を二葉双曲面という。



また、双曲線 $x^2 = z^2 + 1$ を Z 軸の周りに回転させて得られる図形

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

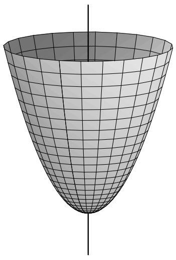
を一葉双曲面という。



一葉双曲面にはたくさんの直線が含まれる。詳しくは次の講義に出てくる。

上に挙げた円錐、回転楕円面、一葉双曲面、二葉双曲面は x, y の 2 次式が 0 になる形の方程式で書ける。その様な曲面を 2 次曲面という。

例 3.4 回転放物面　$z = x^2$ を z 軸で回転させた曲面を回転放物面という。上と同様にして回転させるとカップのような形ができる。これは回転放物面と呼ばれる。



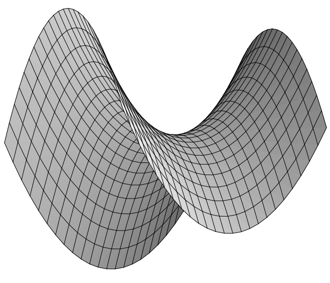
例 3.5 回転軸を通らない直線　回転軸を含む面に含まれる曲線ばかり考えていたが、回転軸に含まれない曲線を回転させると意外な曲面が現れることがある。たとえばもっとも簡単な図形である直線であっても回転軸を通らなければどんな形になるかは興味深いものがある。

4　各地点の高さを用いて曲面を表すー２変数関数のグラフ

地形を表すのに、上からみてそれぞれの点の高さを書き込むことで表現できることがある。平面の座標を決めて、地点 (x, y) の高さは x, y の関数なので、２変数関数といわれる。高さを書くのに、同じ高さを結べば、等高線ができる。等高線をみるとその地形の様子がよくわかるのである。たとえば等高線が密になっていれば急斜面であるとか、等高線がそのまわりで円形であれば、山（あるいは窪地）であるなどという性質である。山や窪地は特徴的な地点であるが、もうひとつの特徴的なタイプの地点が多く存在する。それは峠の点で、馬の鞍ともよばれる。例えば、地点 (x, y) での高さが２変数関数 $x^2 - y^2$ で与えられる地形における原点である。高さの座標を z にとれば、曲面の方程式は

$$z = x^2 - y^2$$

で与えられる。このとき東西を行き来する人にとってはこの地点はそのまわりで最小点であり、南北を行き来する人にとってはこの地点はそのまわりで最大点となっているという地点である。上の曲面も回転体ではないけれども２次曲面になっていて、双曲放物面と言われ方程式は $z = x^2 - y^2$ となる。



　その等高線はたいてい双曲線の形をしているが、高さが０の等高線、つまり馬の鞍の地点の高さの等高線だけは特別で原点で交わる二つの直線となる。

5　曲面を切ってみる

曲面の断面として得られる曲線には興味深いものがある。例えば、懐中電灯を斜めに照らした時にできる曲線として、楕円、放物線、双曲線が出てくる。懐中電灯の光が円錐状にでていることを考えると、次の定理からこのことがわかる。

定理 5.1 図のように円錐を頂点を通らない平面で切ったとき、その切り口は楕円、放物線、または双曲線となる。ここで平面と円錐の二つの共通接球面と平面の接点が焦点となる。

証明.
　1．**式を使った証明** ここでは z が定数で決まる平面の以外の場合を考える。切る平面を適当に回転させて、$x = pz + q$ の形としてよい。$x^2 + y^2 = a^2z^2$ との交点を求めると、

$$(pz+q)^2 + y^2 = a^2z^2$$

$$(p^2 - a^2)z^2 + 2pqz + q^2 + y^2 = 0$$

ここで $p^2 - a^2 \neq 0$ であれば、

$$(p^2 - a^2)(z - \frac{pq}{p^2 - a^2})^2 + y^2 = \frac{p^2q^2}{p^2 - a^2} - q^2 = \frac{a^2q^2}{p^2 - a^2}$$

となる。従って YZ 平面に射影した形で見ると、

1. $\mid p \mid > \mid a \mid$ ならば楕円、
2. $\mid p \mid = \mid a \mid$ ならば放物線、
3. $\mid p \mid < \mid a \mid$ ならば双曲線、

となる。これから平面に対して真上からみてもやはり楕円、放物線、双曲線の形であることがわかる。 □

　2．**図形的な証明** 講義では図形的な証明についても述べることにする。