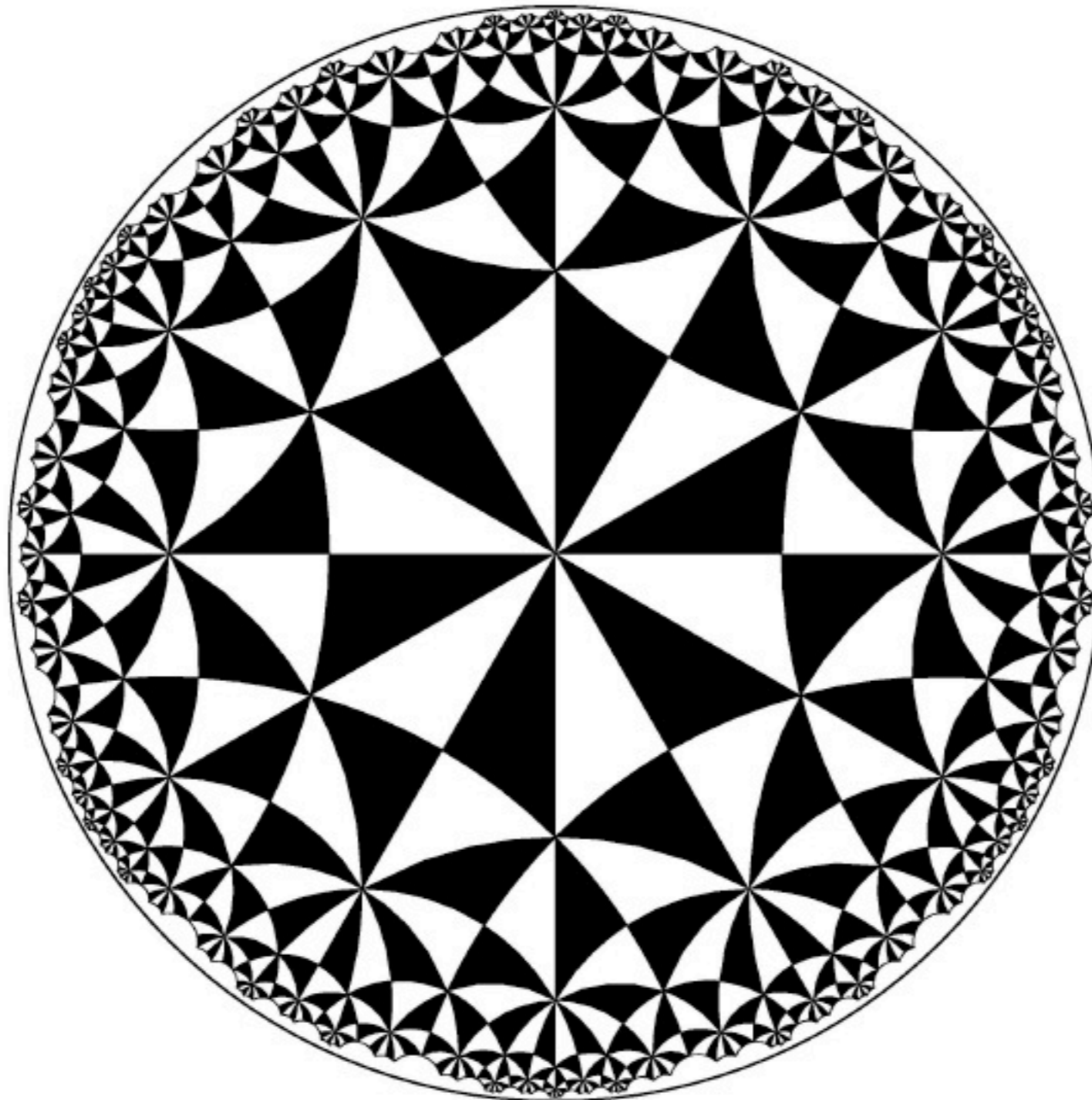
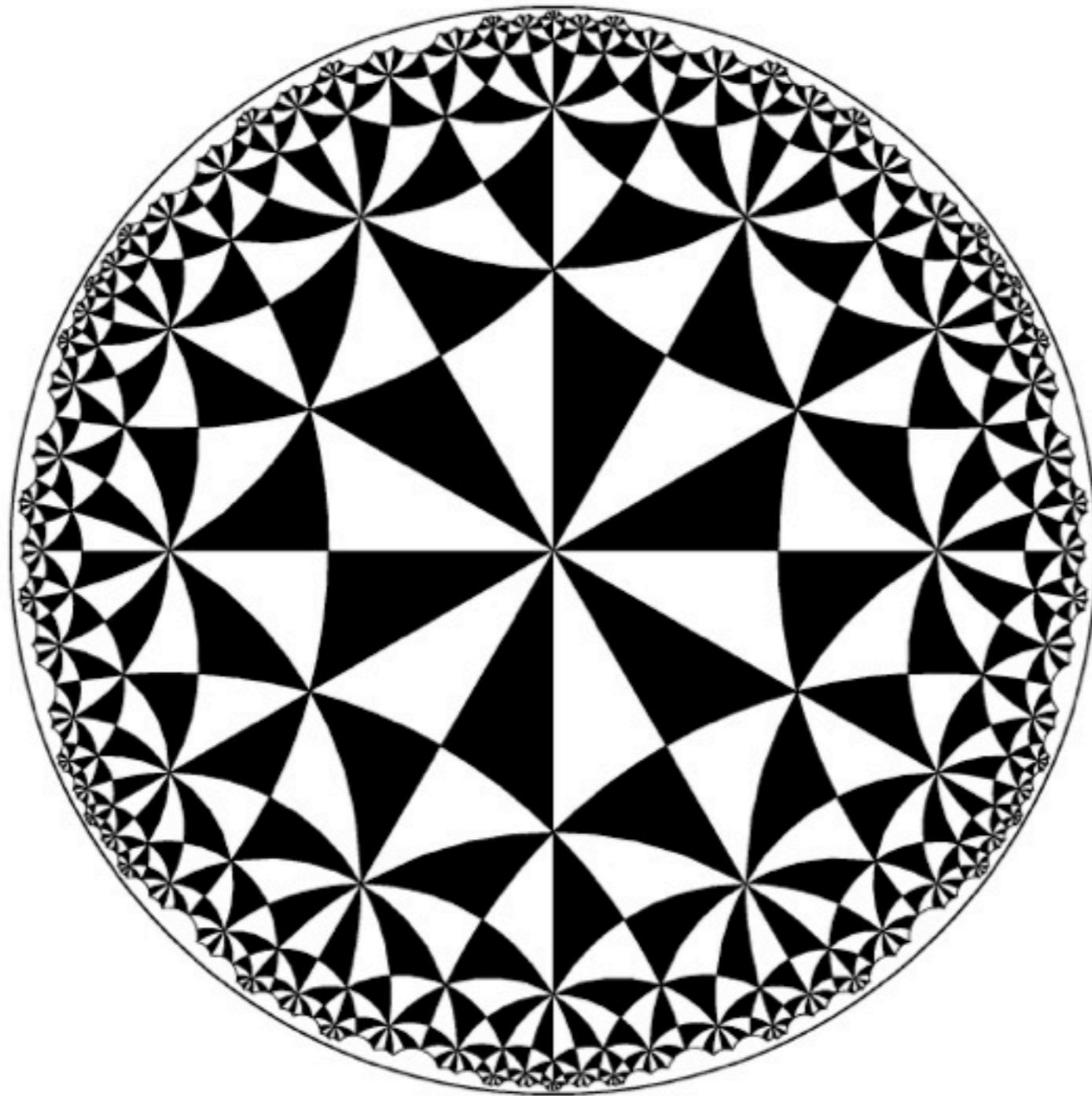


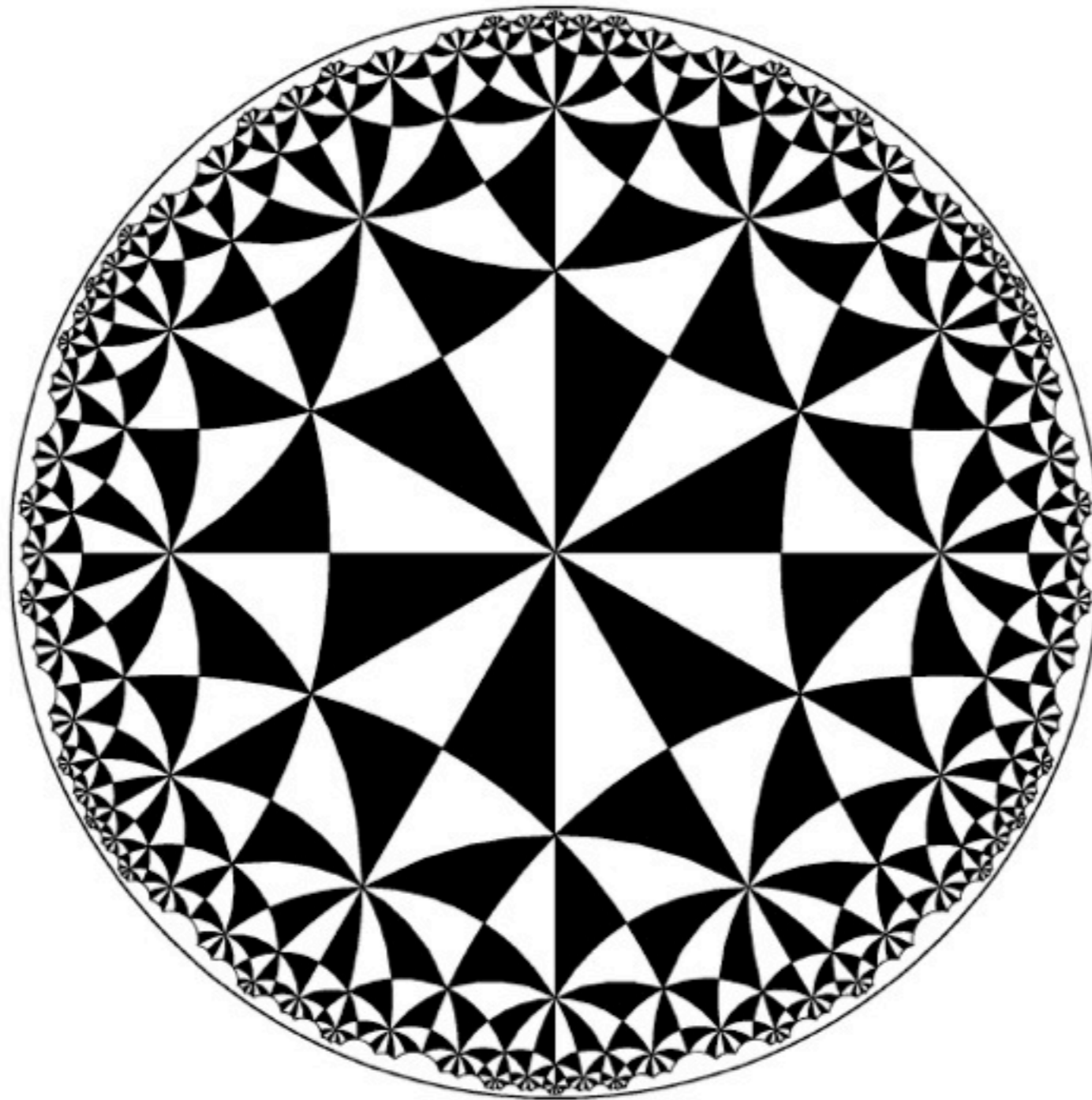
エッシャーはどのようにしてCircle Limit I~IV
を描いたのか？

エッシャーはどのようにしてCircle Limit I~IV
を描いたのか？

数学者コクセターの論文の挿絵

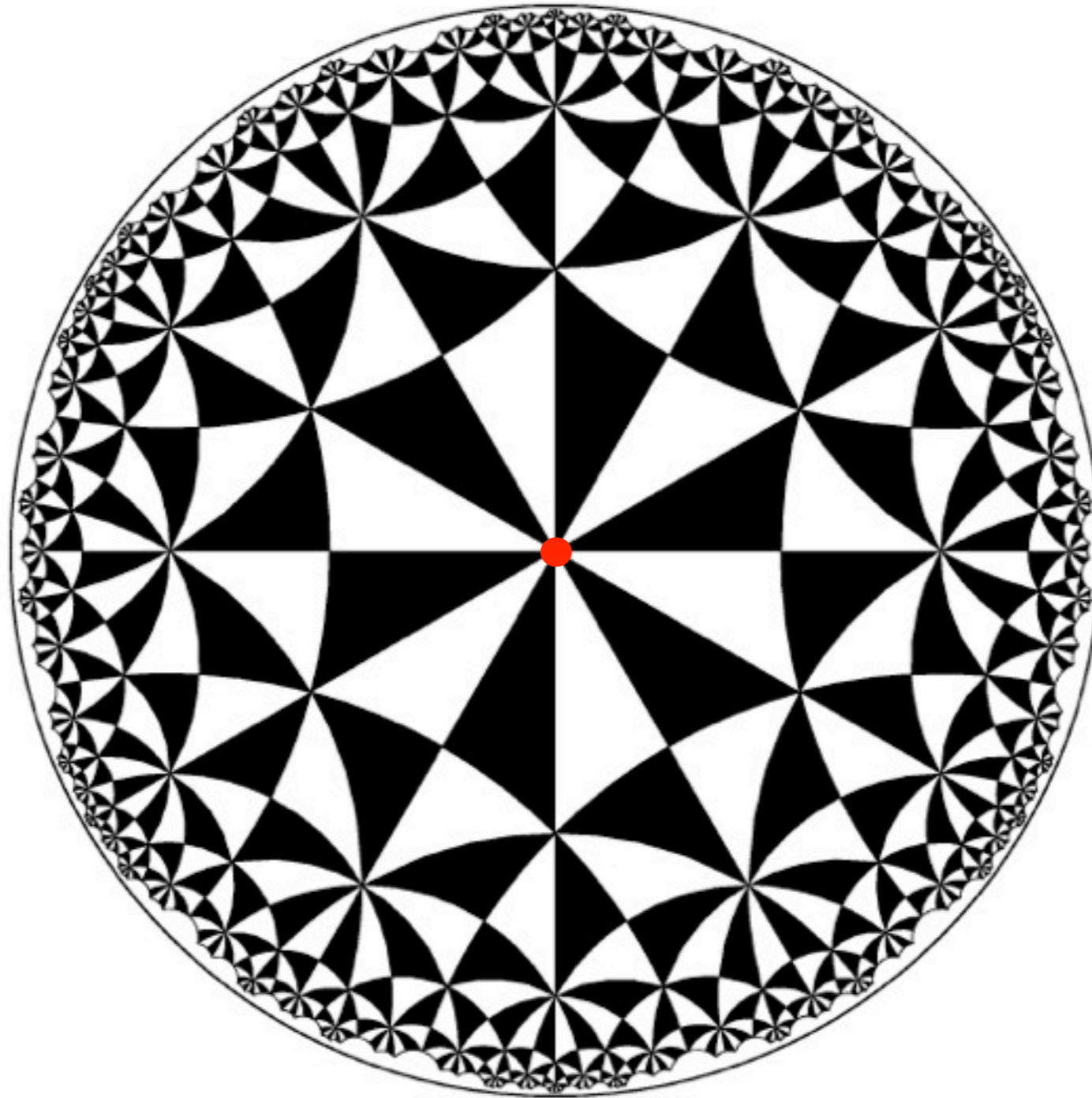




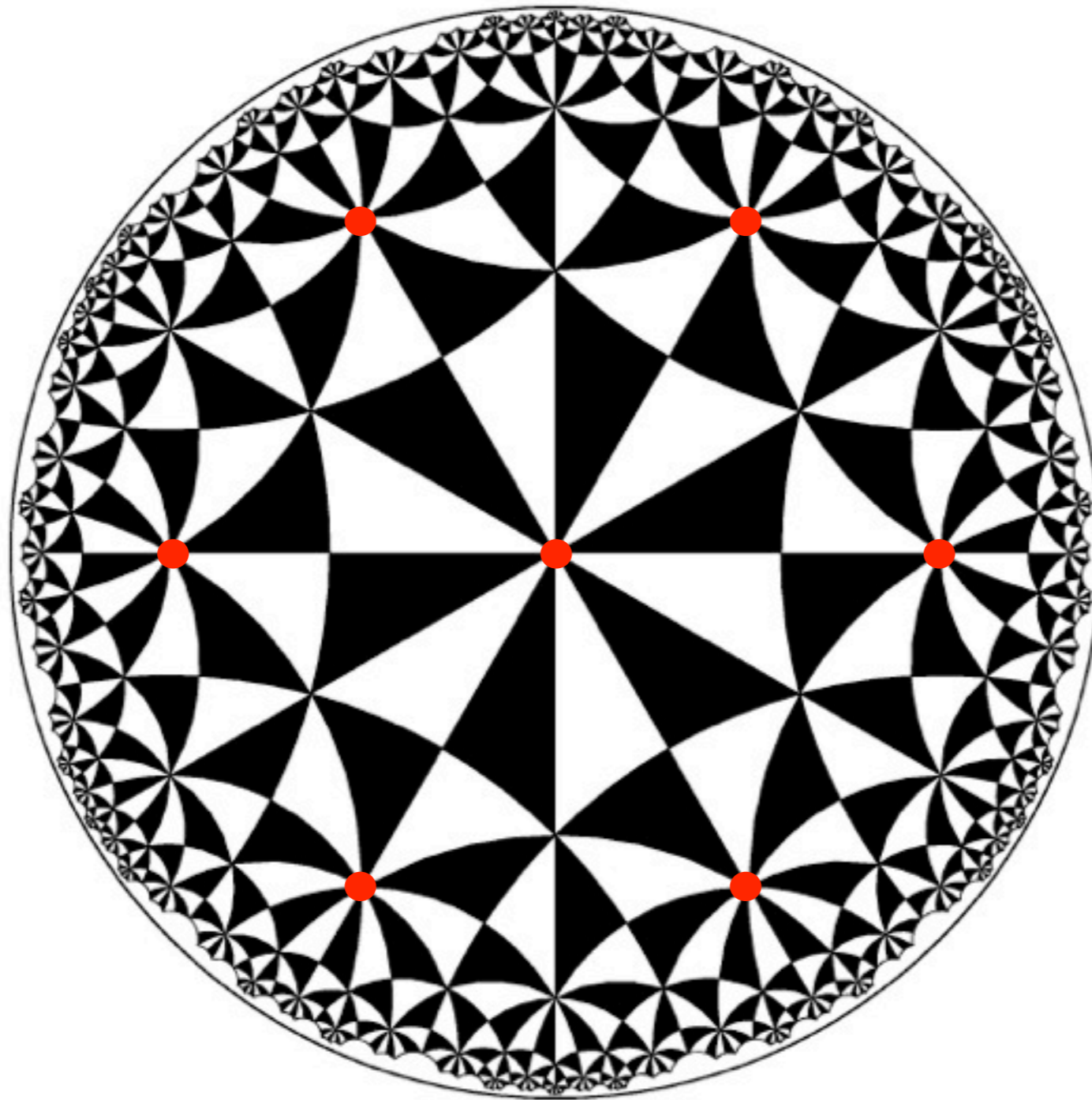


- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個

12個の頂点

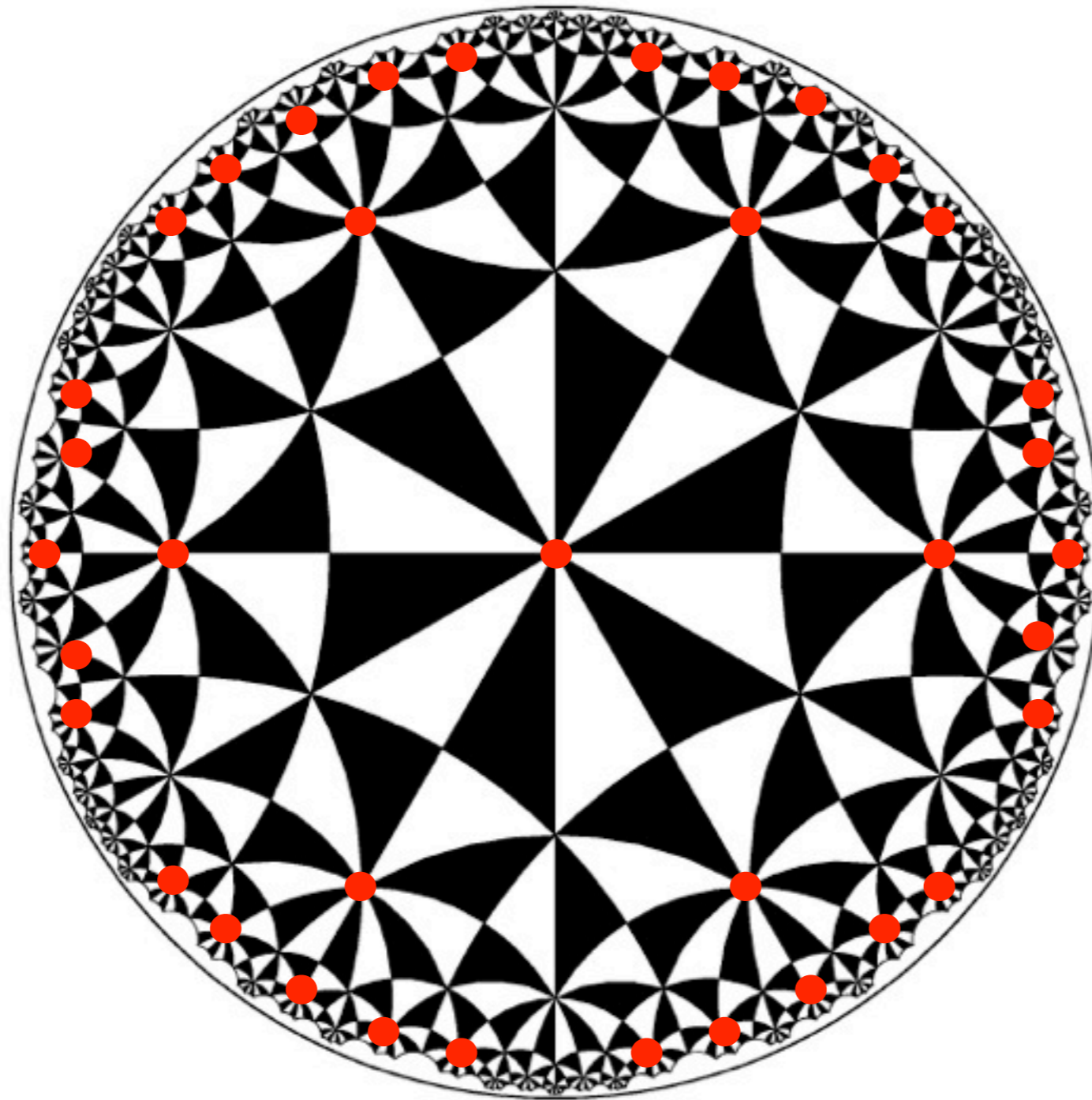


- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個



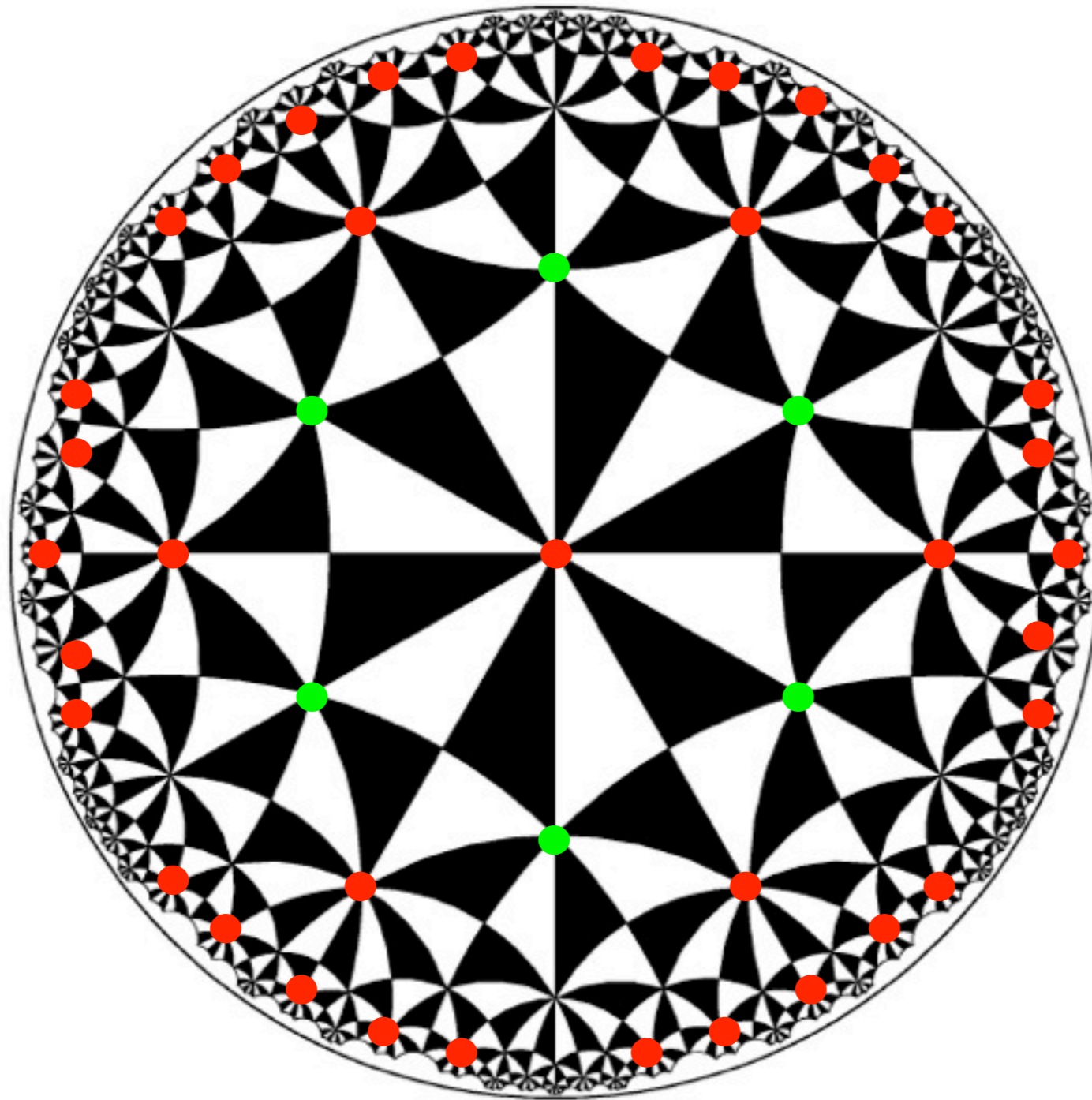
12個の頂点

- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個



12個の頂点

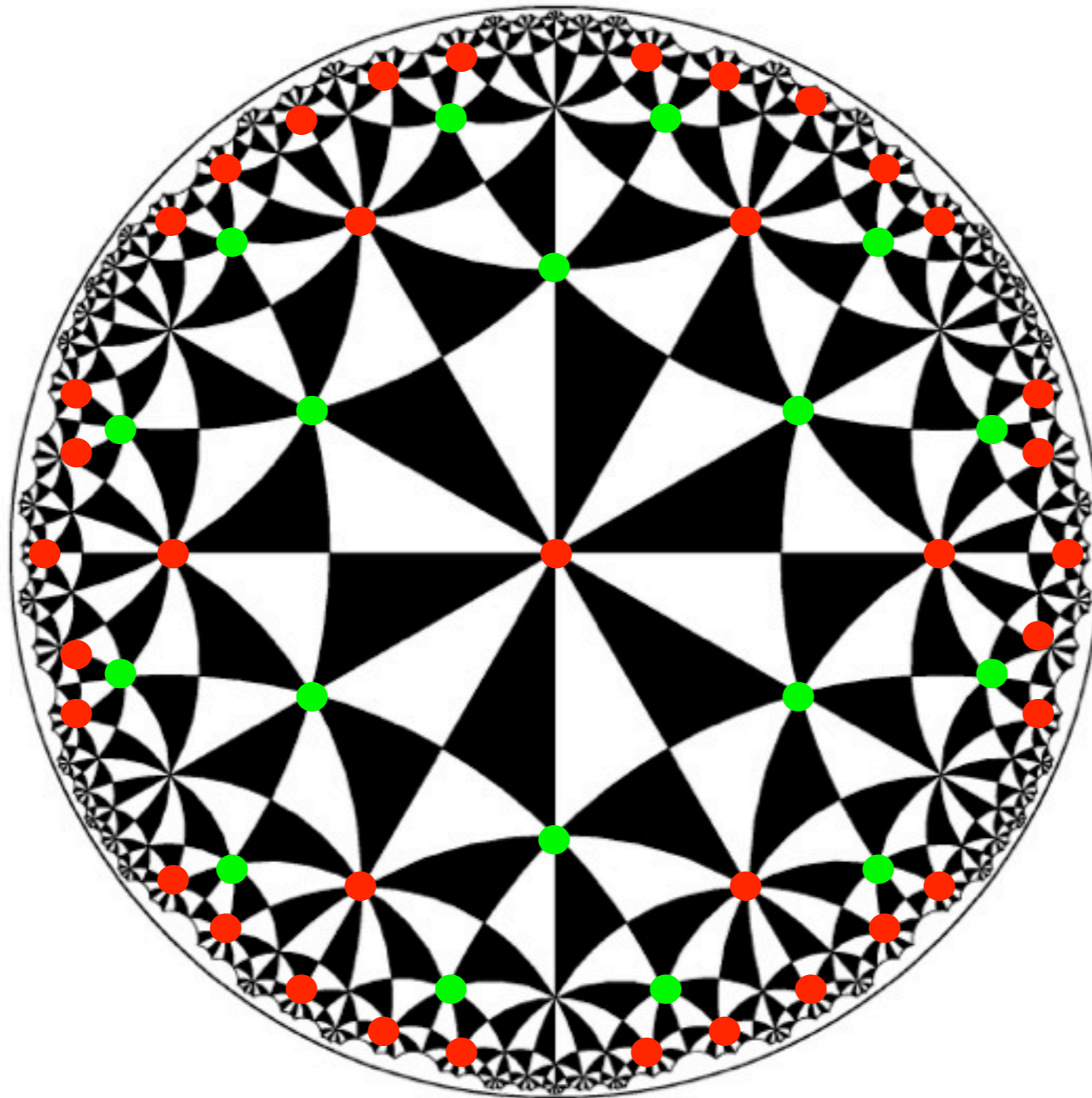
- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個



12個の頂点

8個の頂点

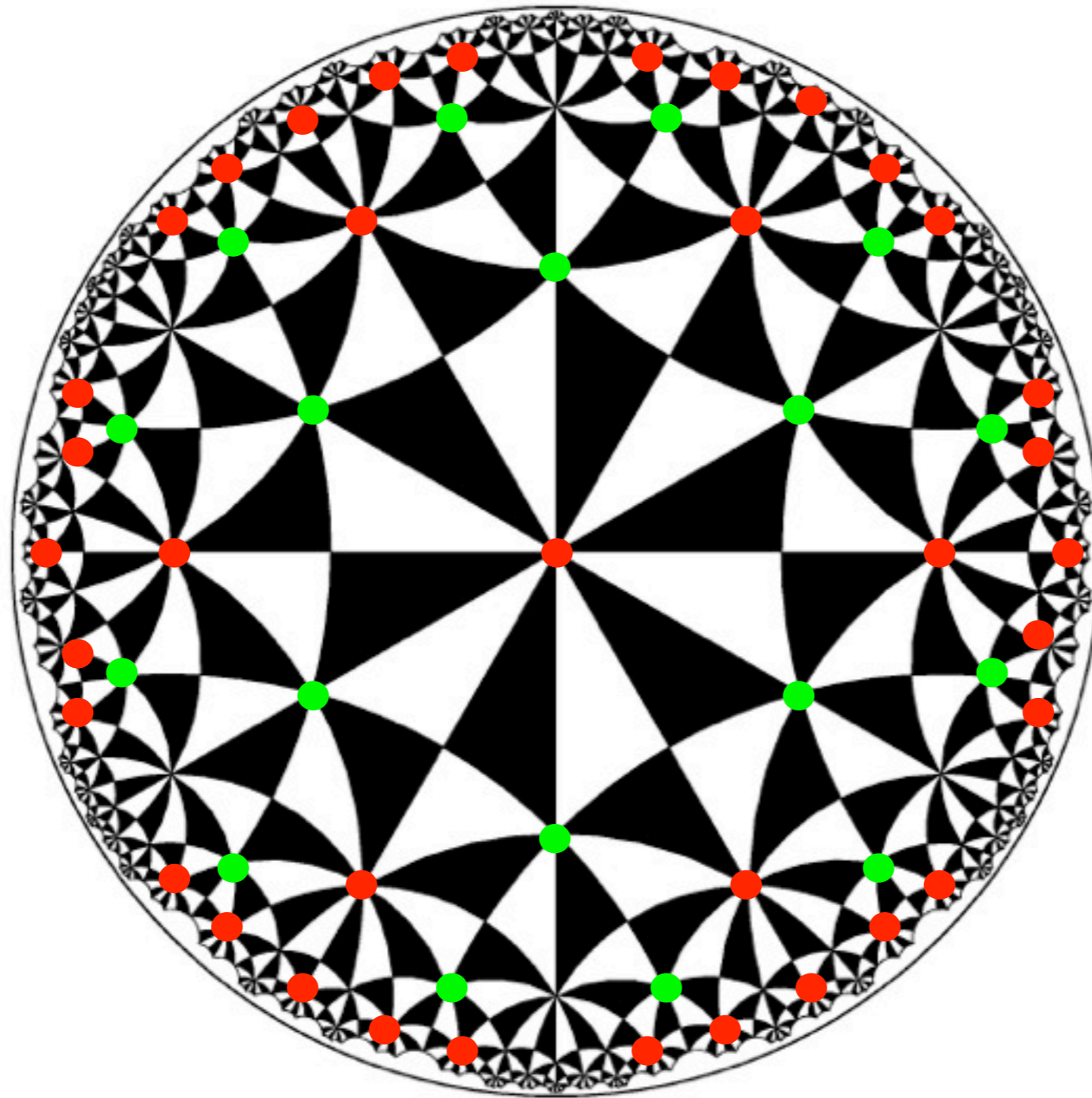
- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個



12個の頂点

8個の頂点

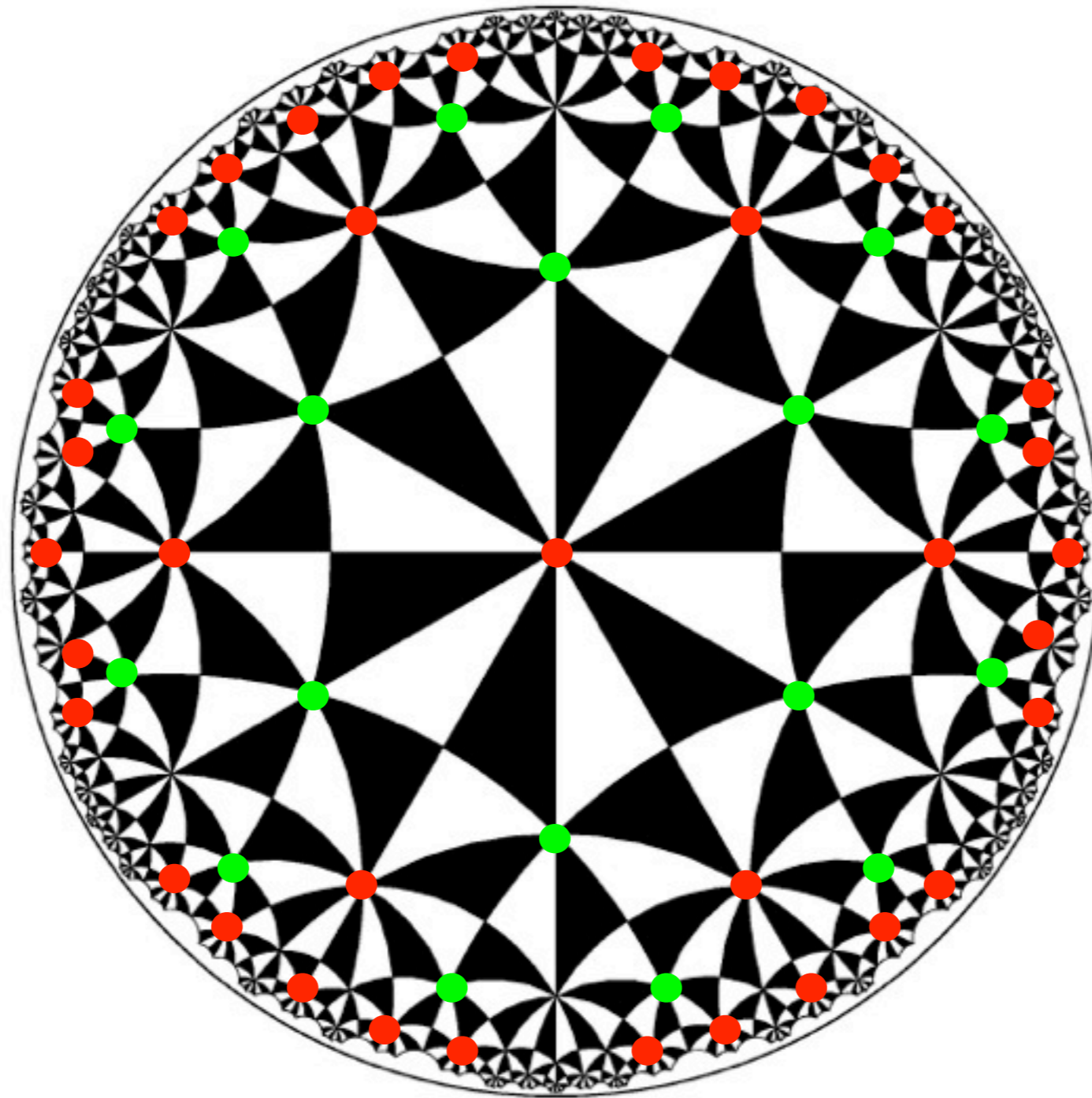
- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個



12個の頂点

8個の頂点

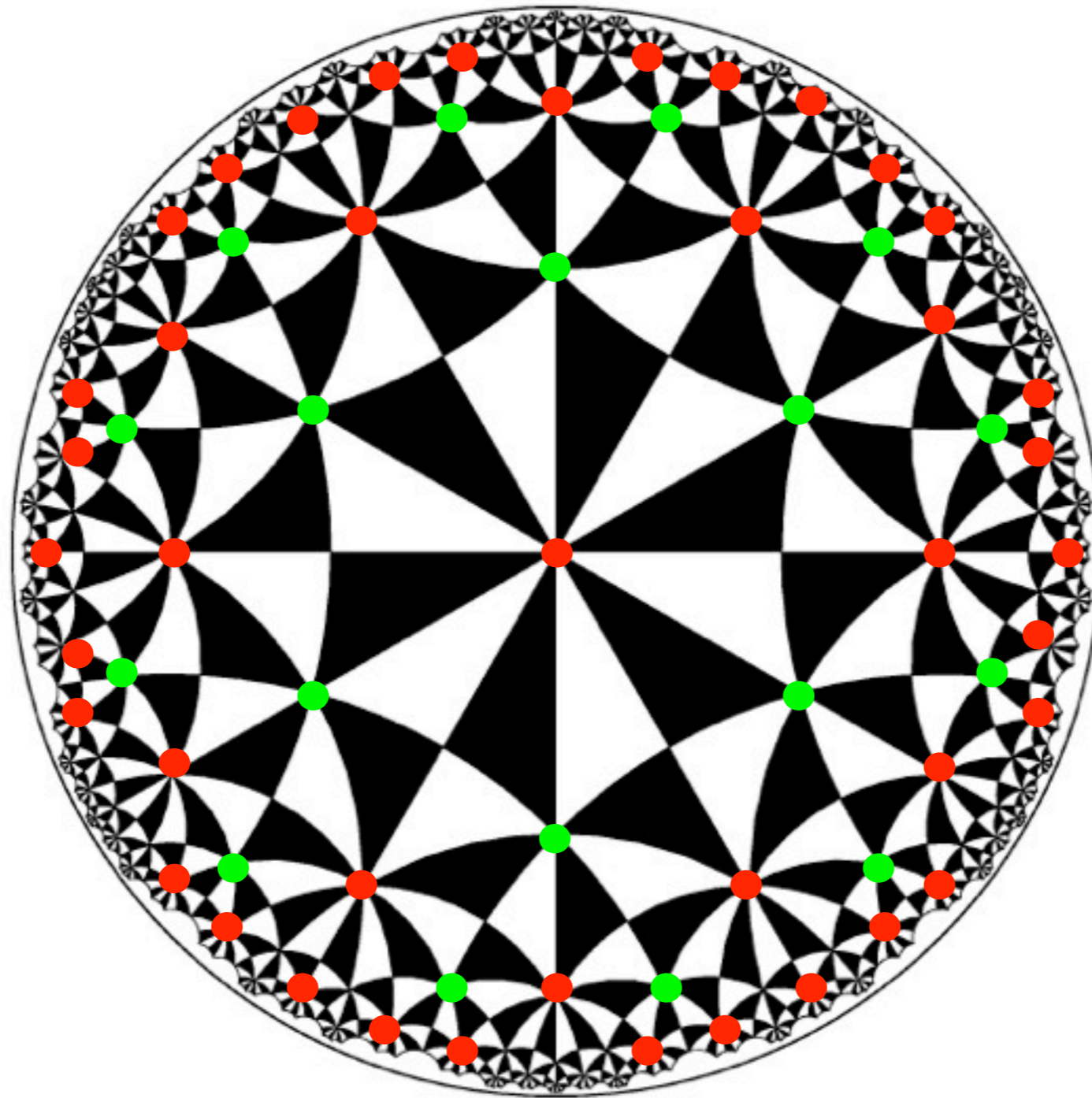
- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個
- 全ての三角形の角度は30度, 45度, 90度



12個の頂点

8個の頂点

- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個
- 全ての三角形の角度は30度, 45度, 90度
- 直交する円に注目するとこの絵が書ける

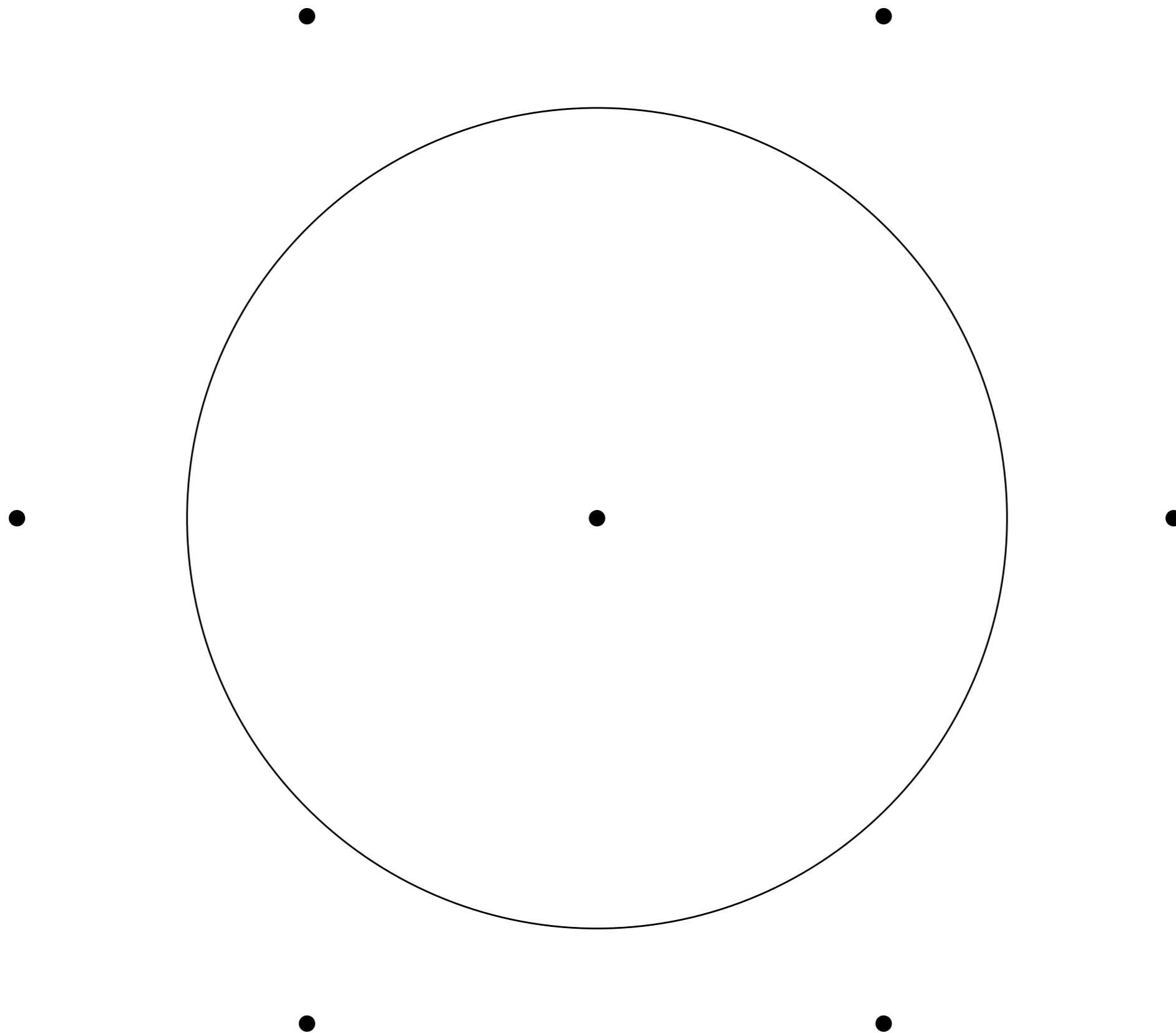


12個の頂点

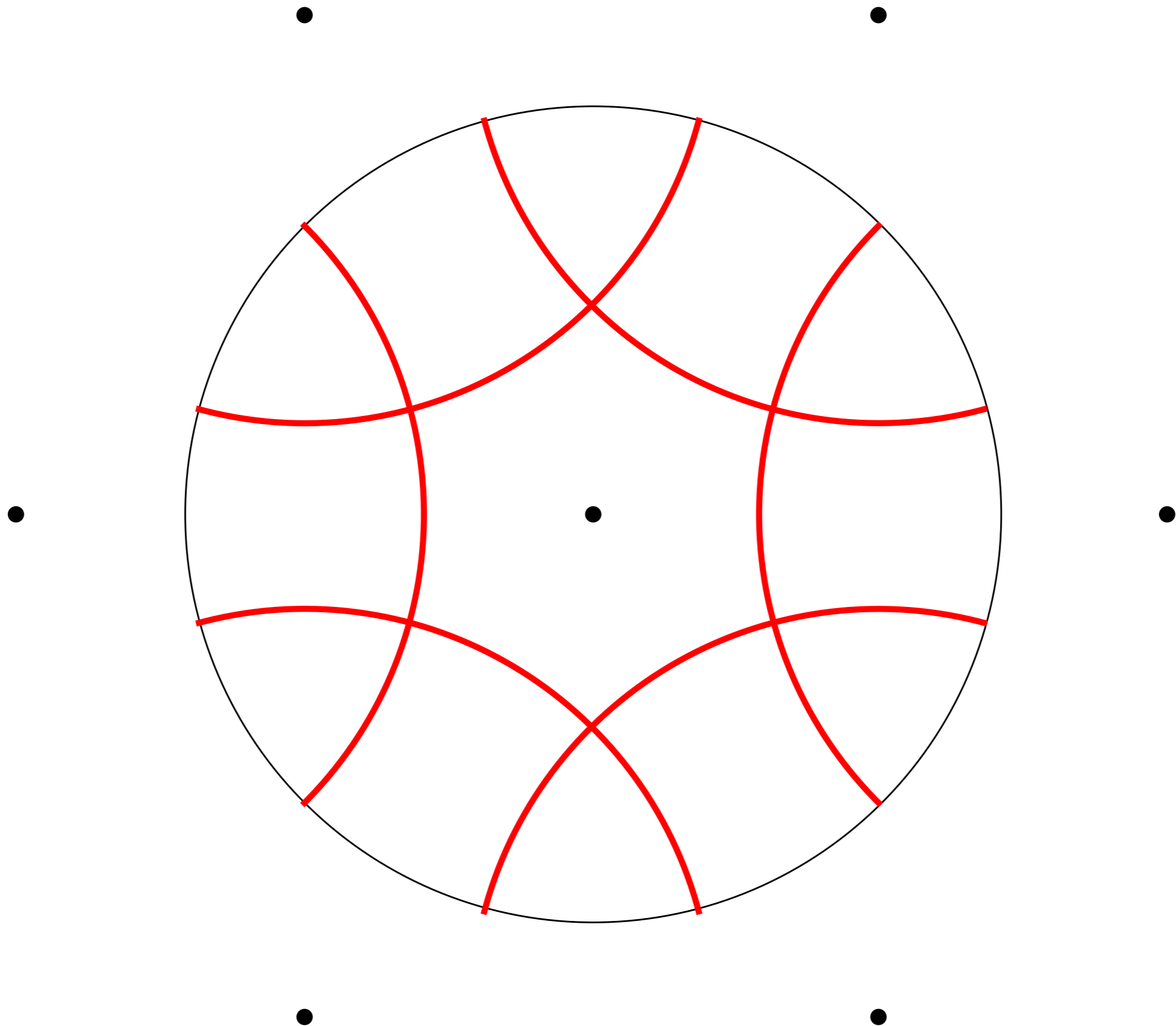
8個の頂点

- 一つの頂点に集まる三角形は12個, 8個, 4個
- 全ての三角形の角度は30度, 45度, 90度
- 直交する円に注目するとこの絵が書ける

半径 1 の円を書きその外に
半径 $\sqrt{2}$ の正六角形の頂点を書く

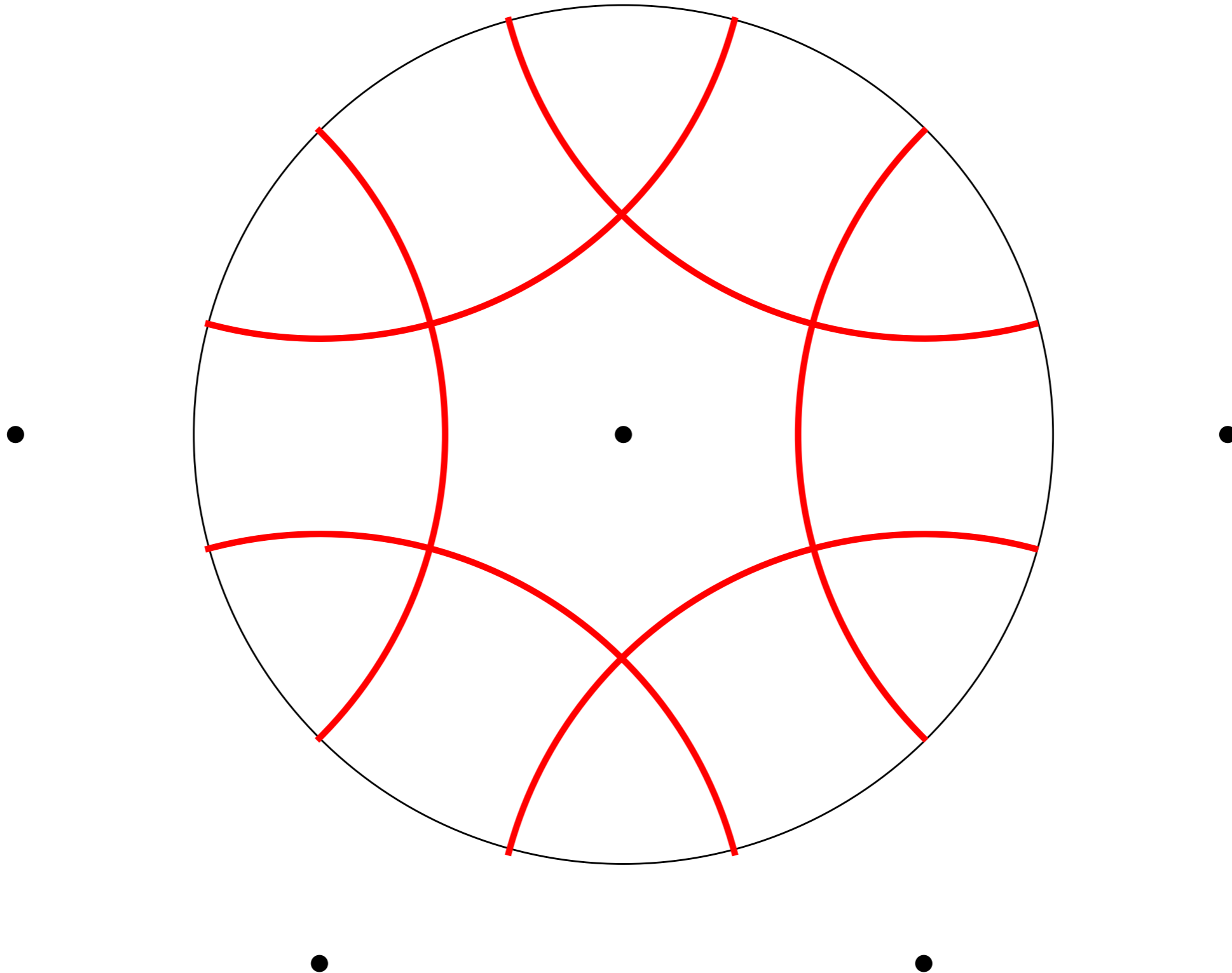


正六角形の頂点を中心とした半径1の円を書く



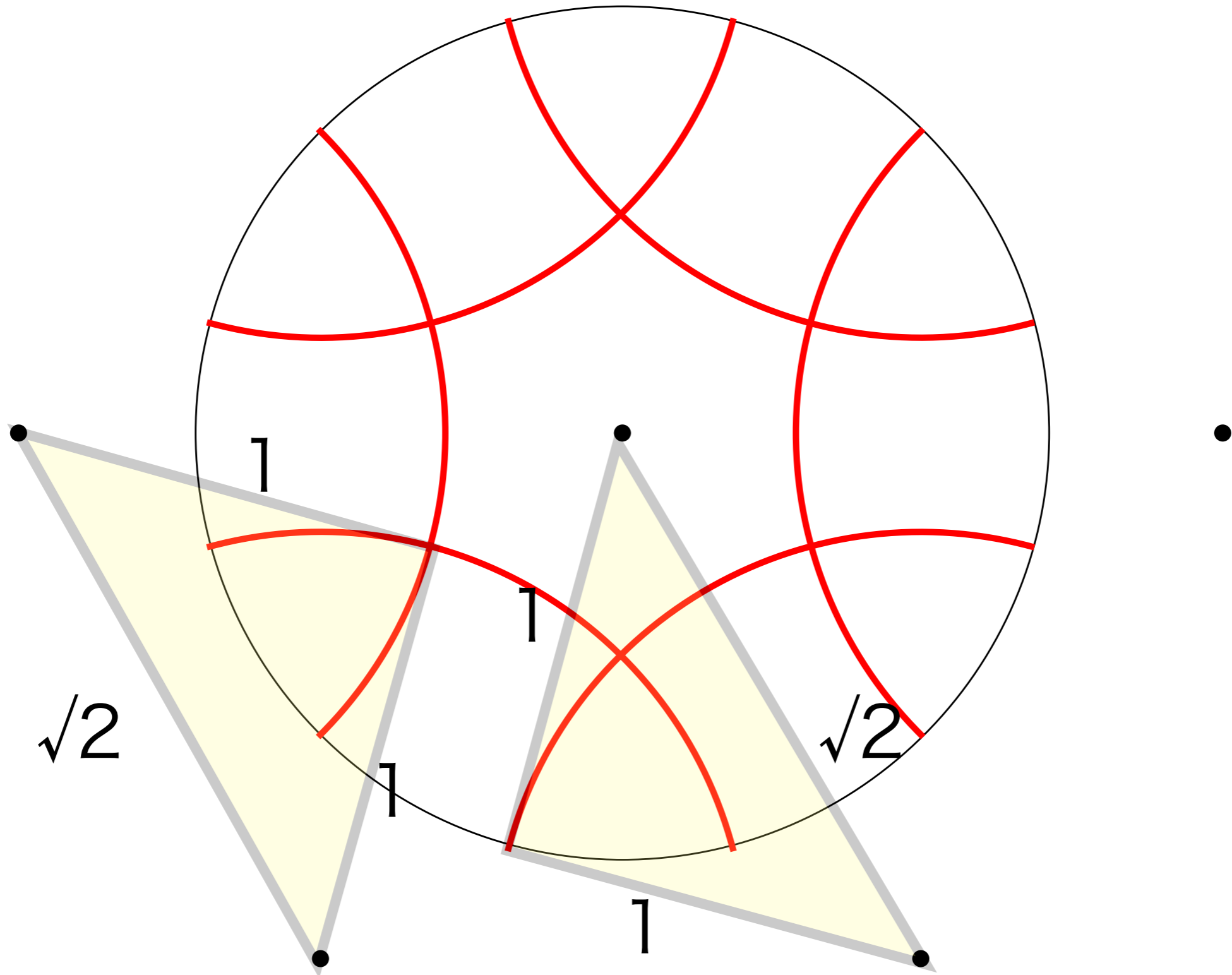
正六角形の頂点を中心とした半径1の円を書く

円の中心の距離を $\sqrt{2}$ にしたので全ての円は直交する

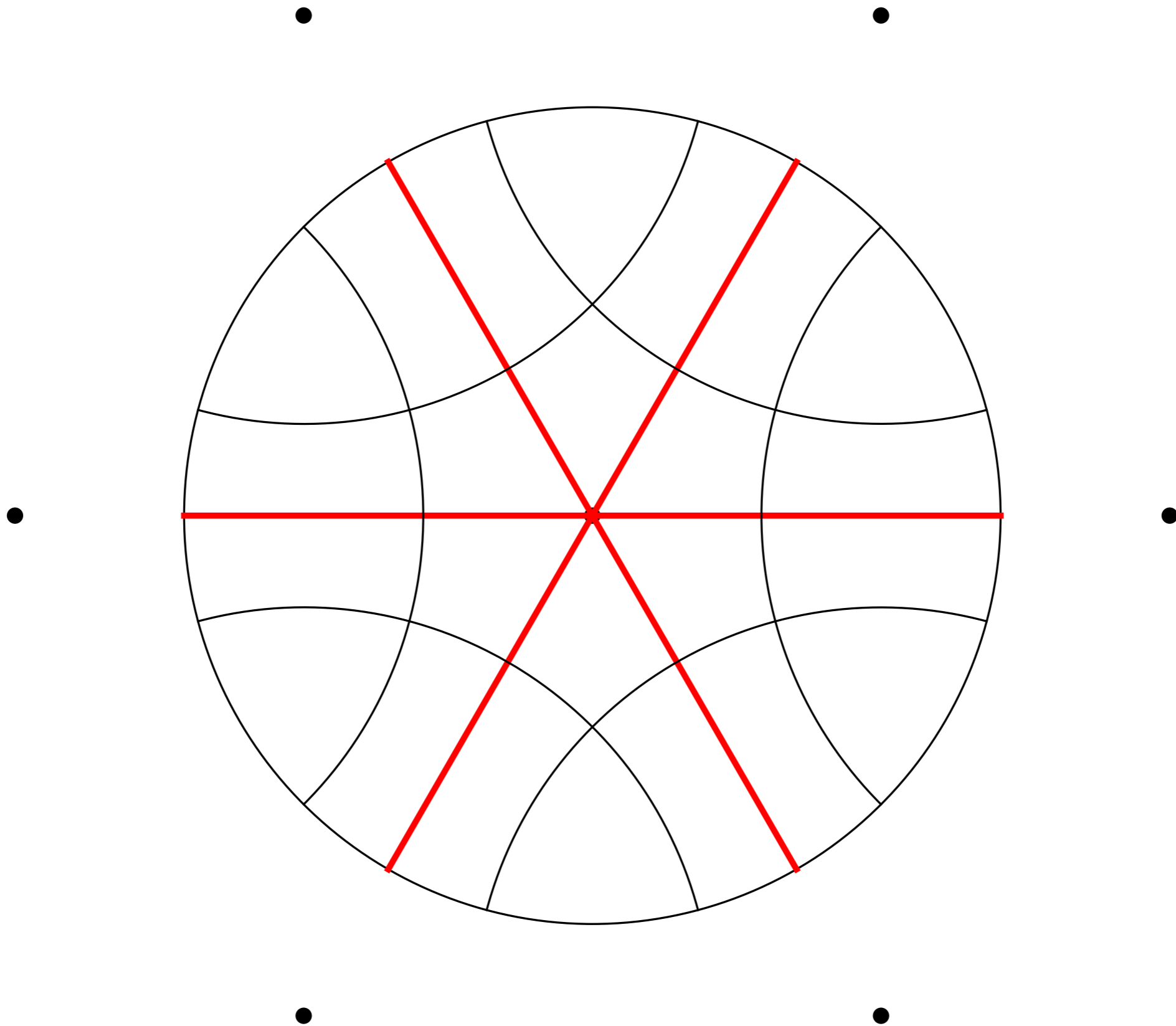


正六角形の頂点を中心とした半径1の円を書く

円の中心の距離を $\sqrt{2}$ にしたので全ての円は直交する

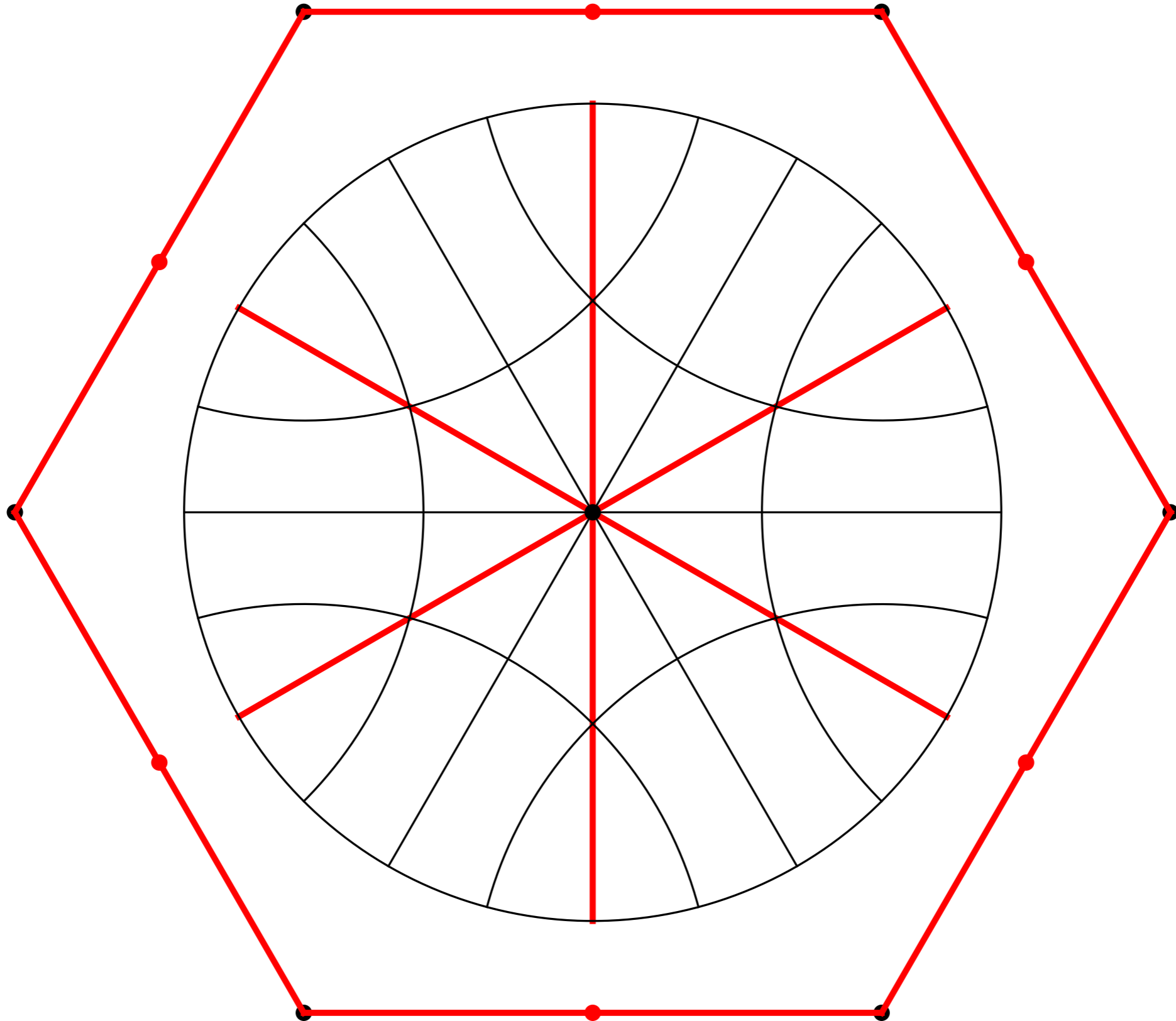


正六角形の頂点と円の中心を結ぶ線を引く

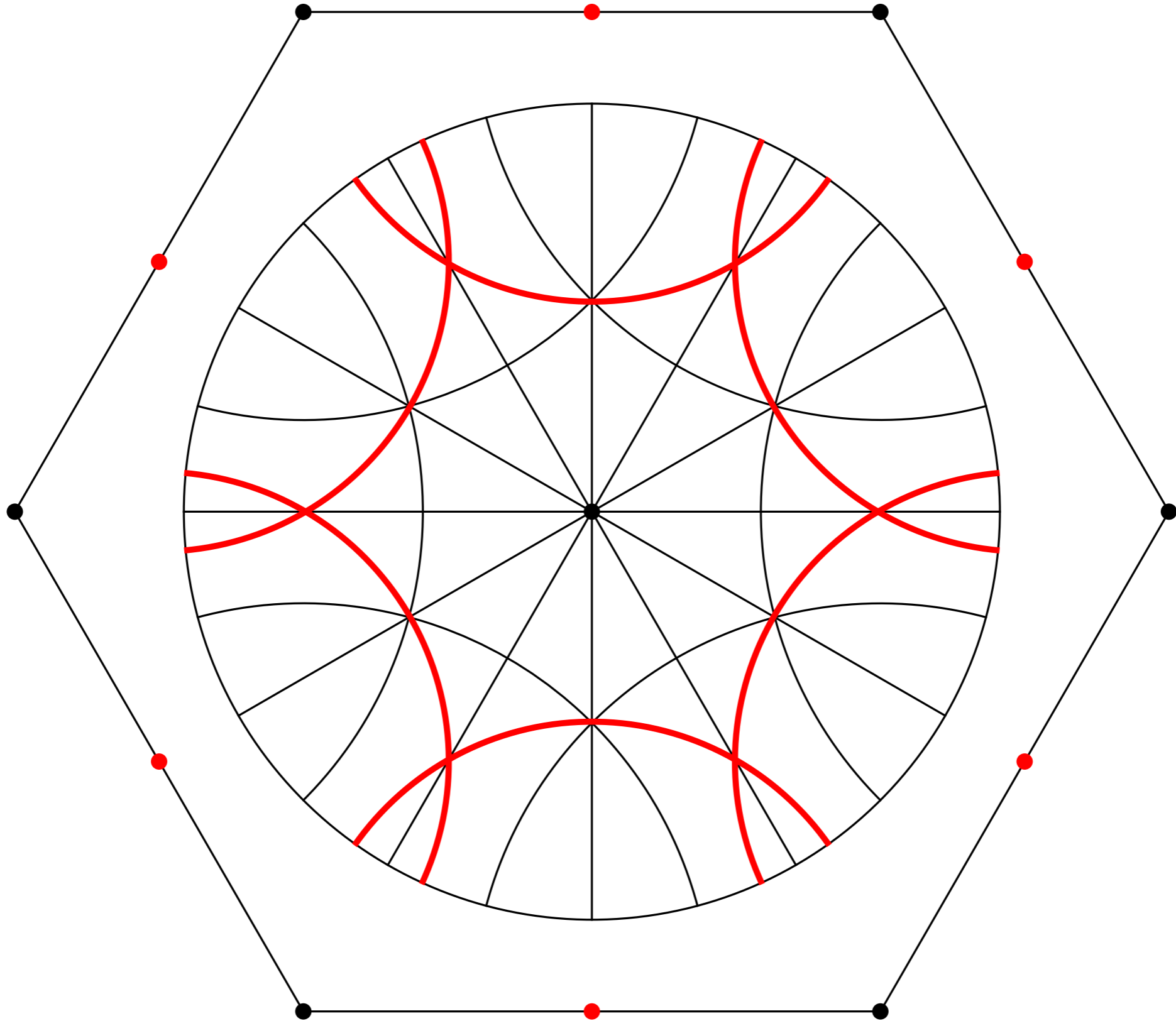


1. 正六角形の辺を書く

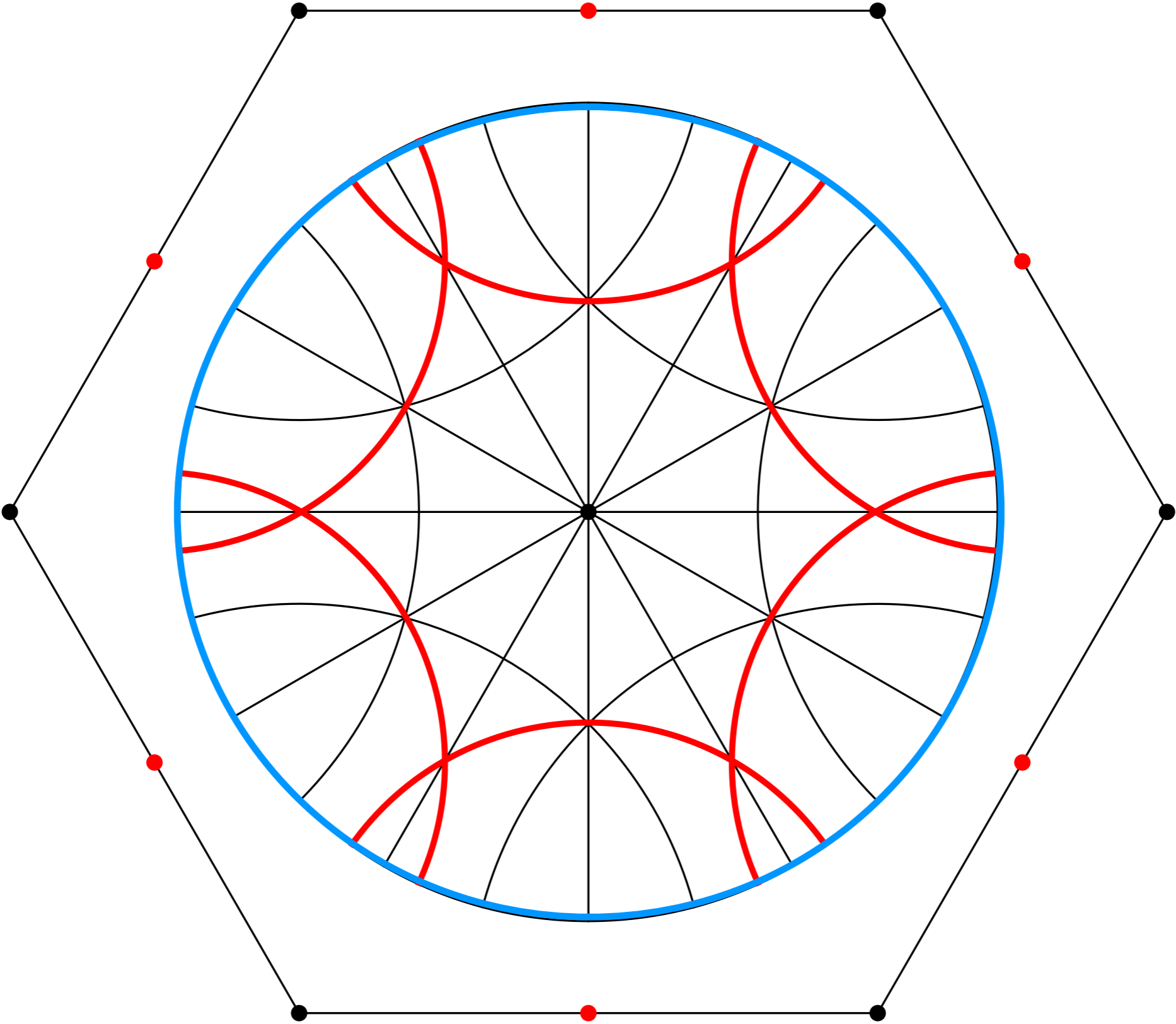
2. 辺の中点と円の中心を結ぶ線を引く



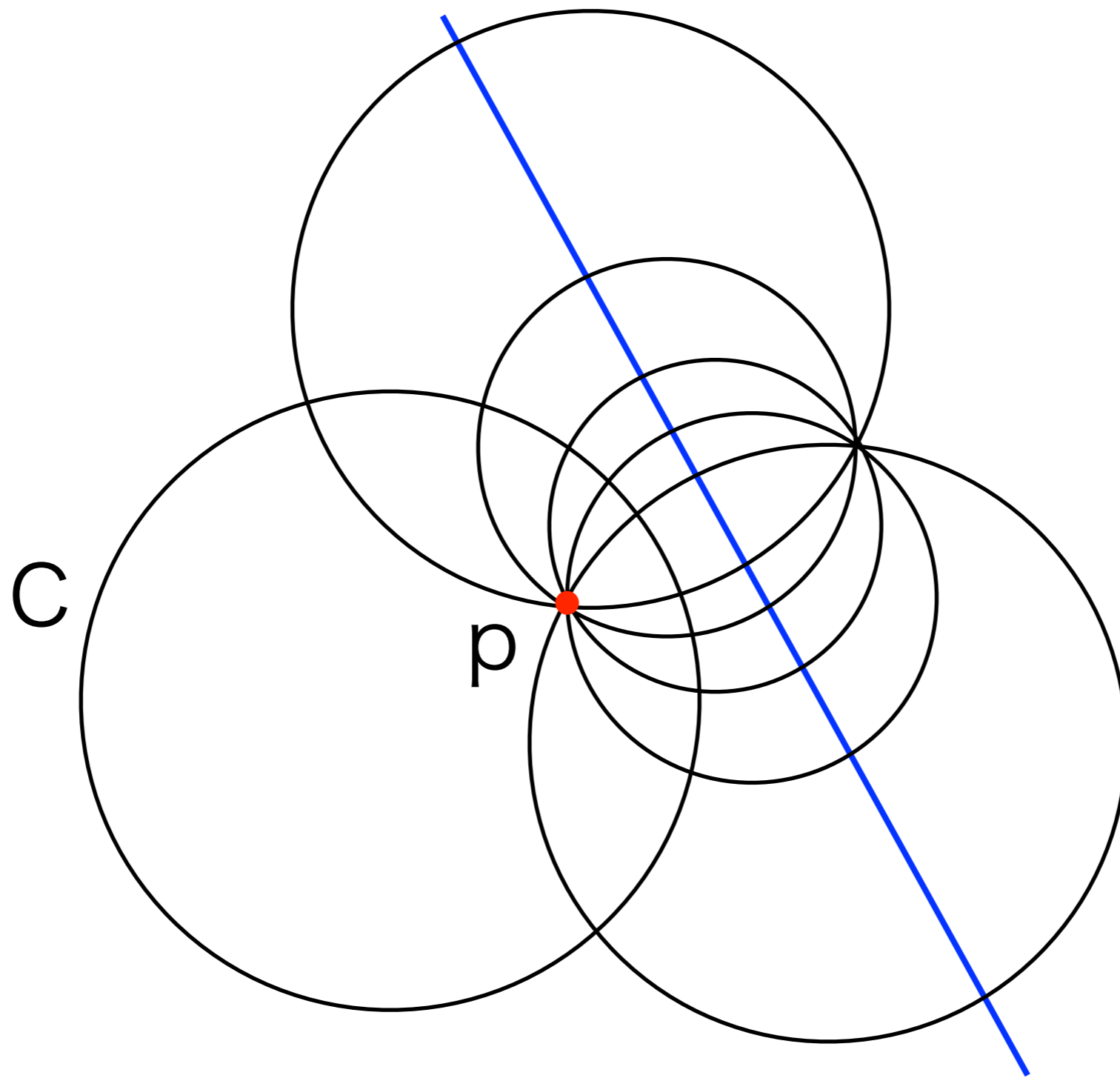
辺の中点を中心として円を書く



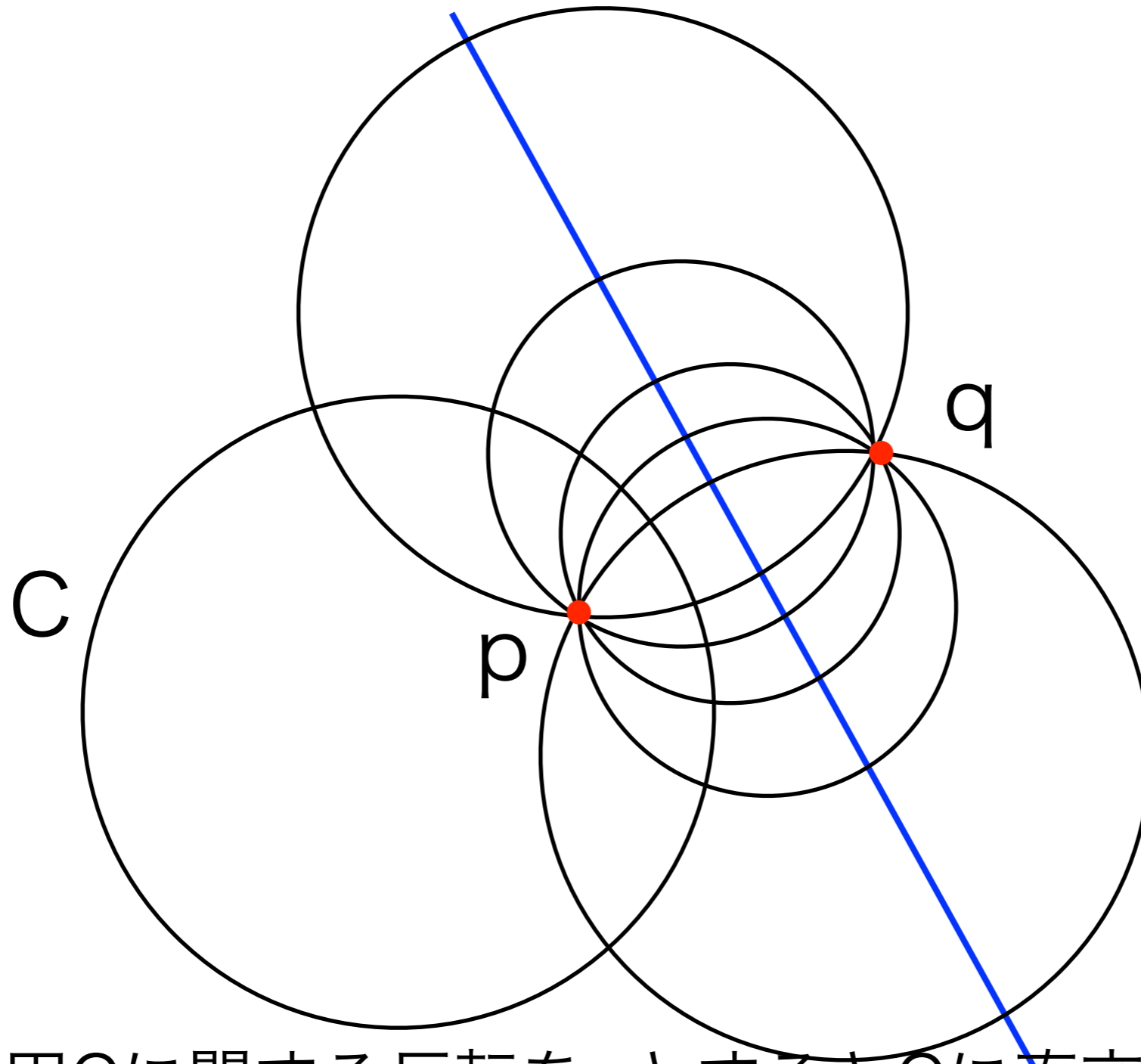
辺の中点を中心として円を書く
赤い円は最初に書いた円に直交している!



定理：円Cの内部にある点pを考える。 pを通り円Cと直交する円の中心は一つの直線の上にある。

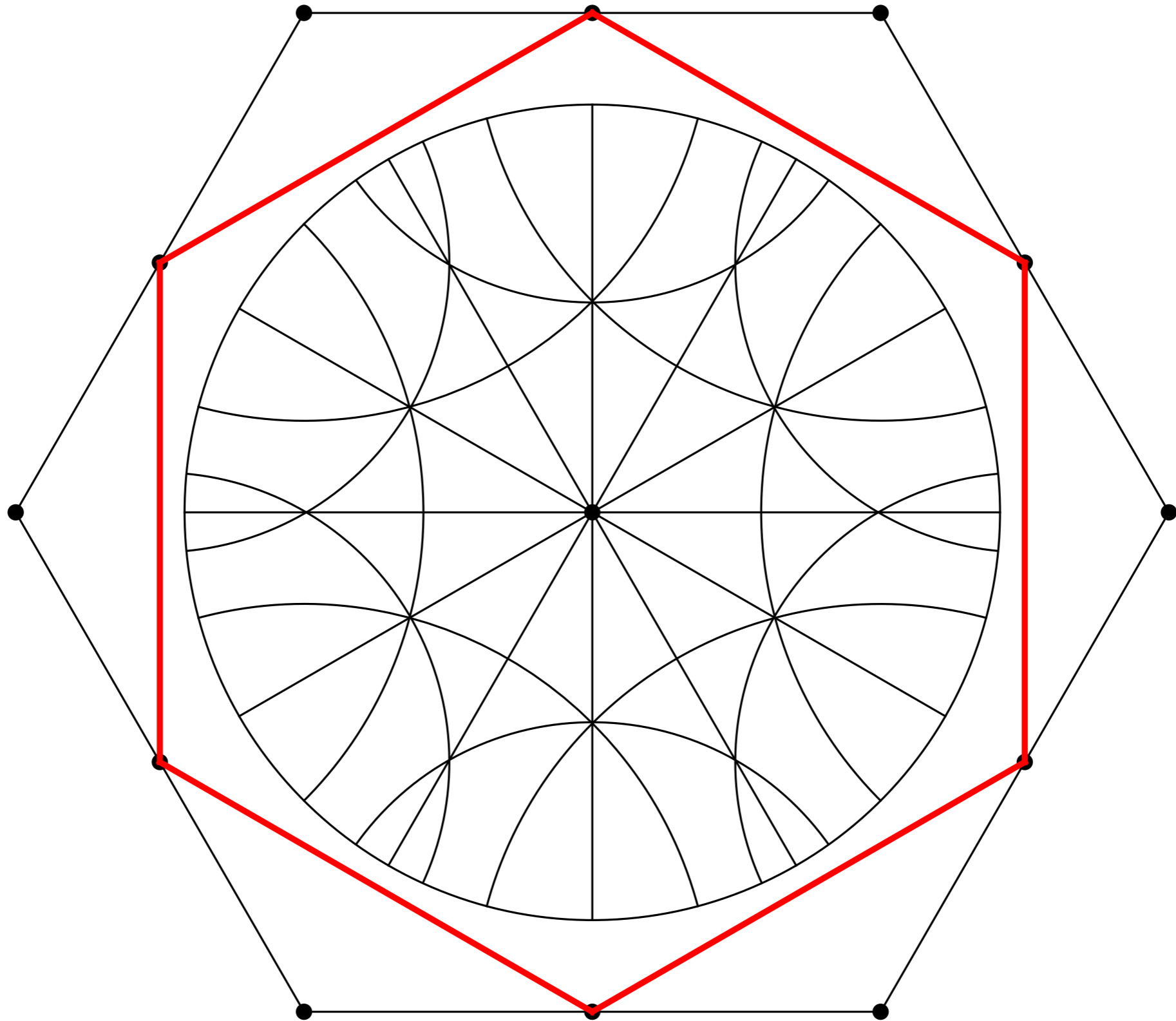


定理：円Cの内部にある点pを考える。 pを通り円Cと直交する円の中心は一つの直線の上にある。

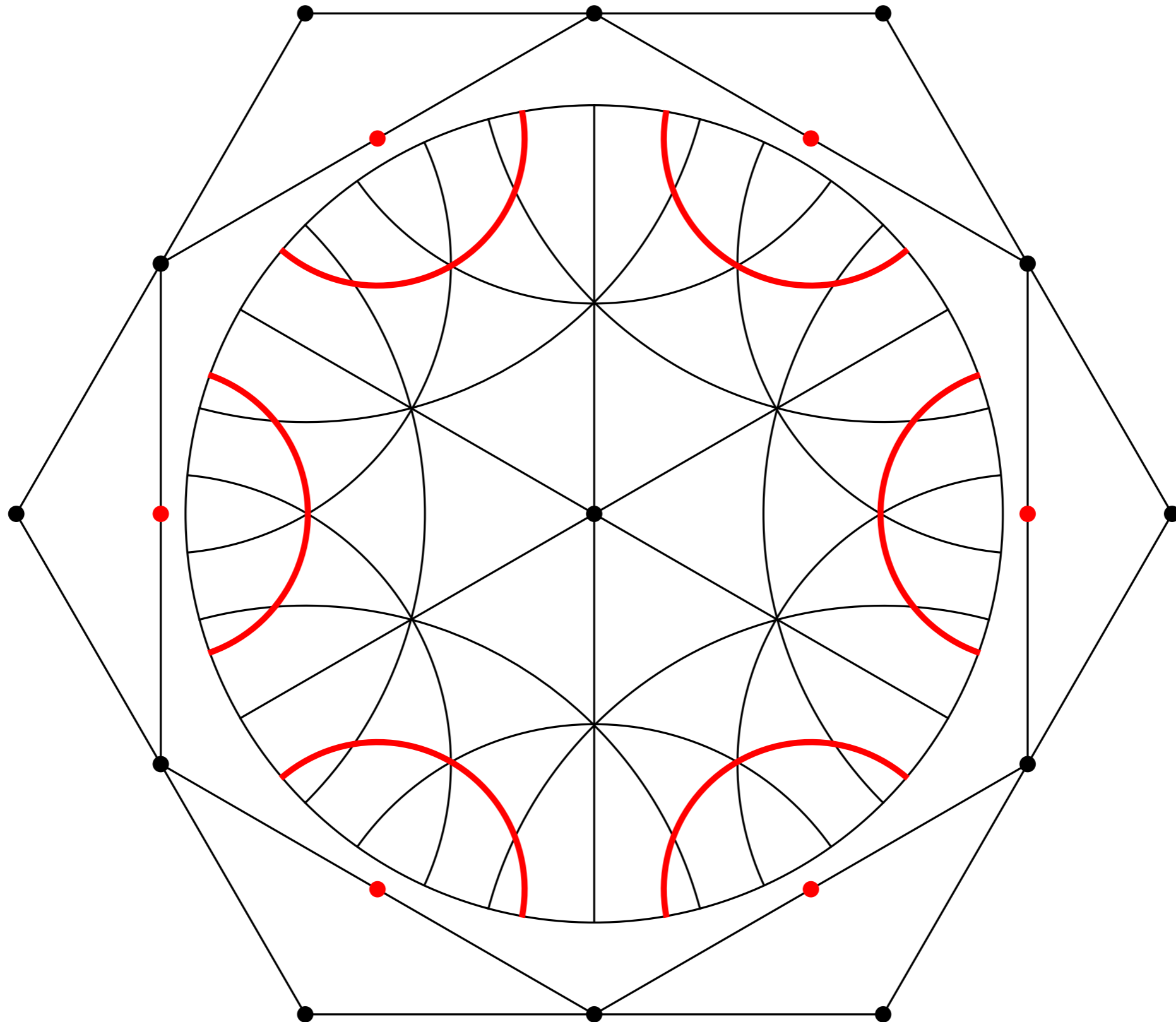


証明：pの円Cに関する反転をqとするとCに直交する円はpとqを通る。 点p,qを通る円の中心は一つの直線上にある。

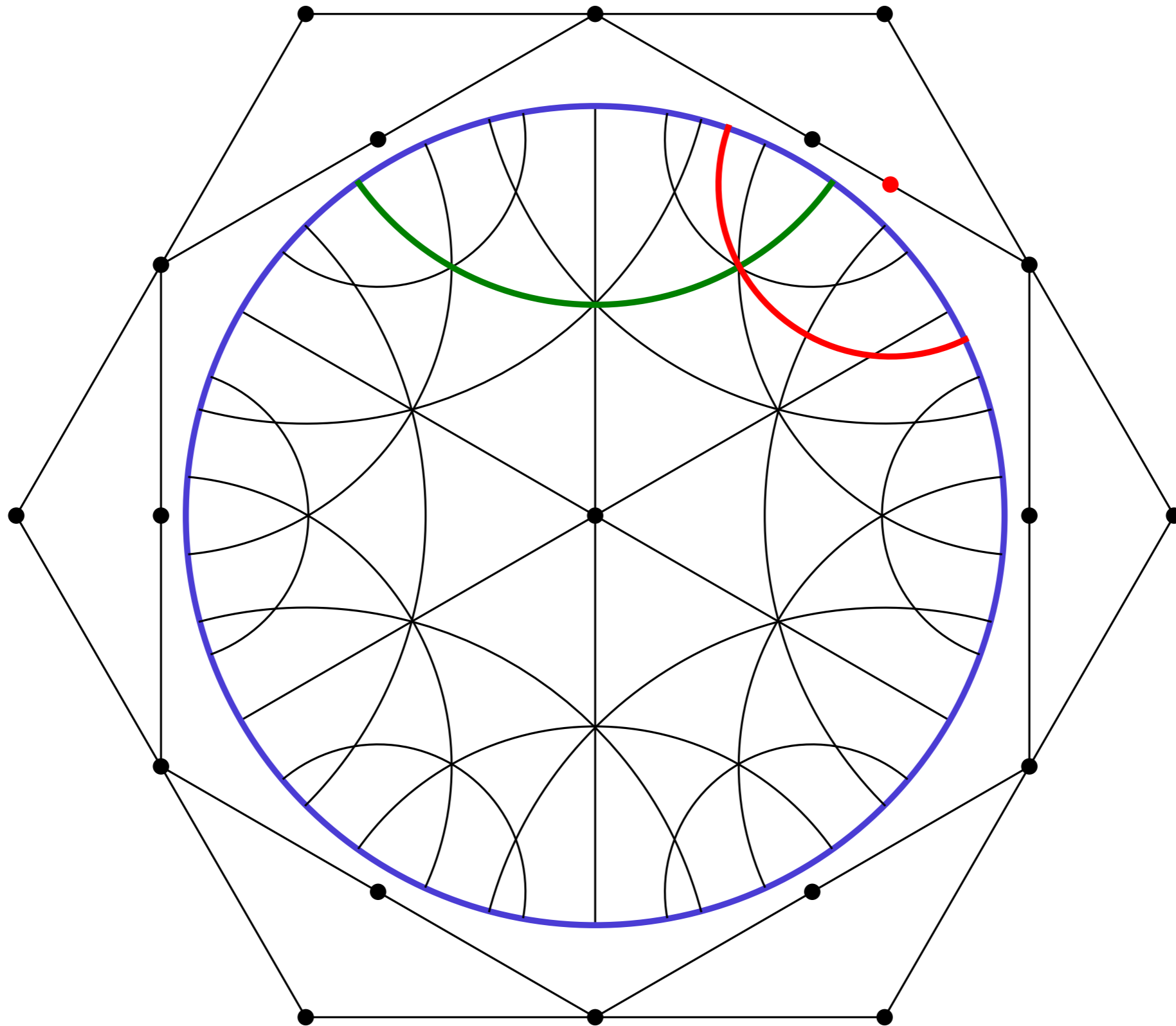
辺の中点を結んで小さい六角形を書く



1. 小さな六角形の辺の中点を書く
2. その中点を中心とする円を書く

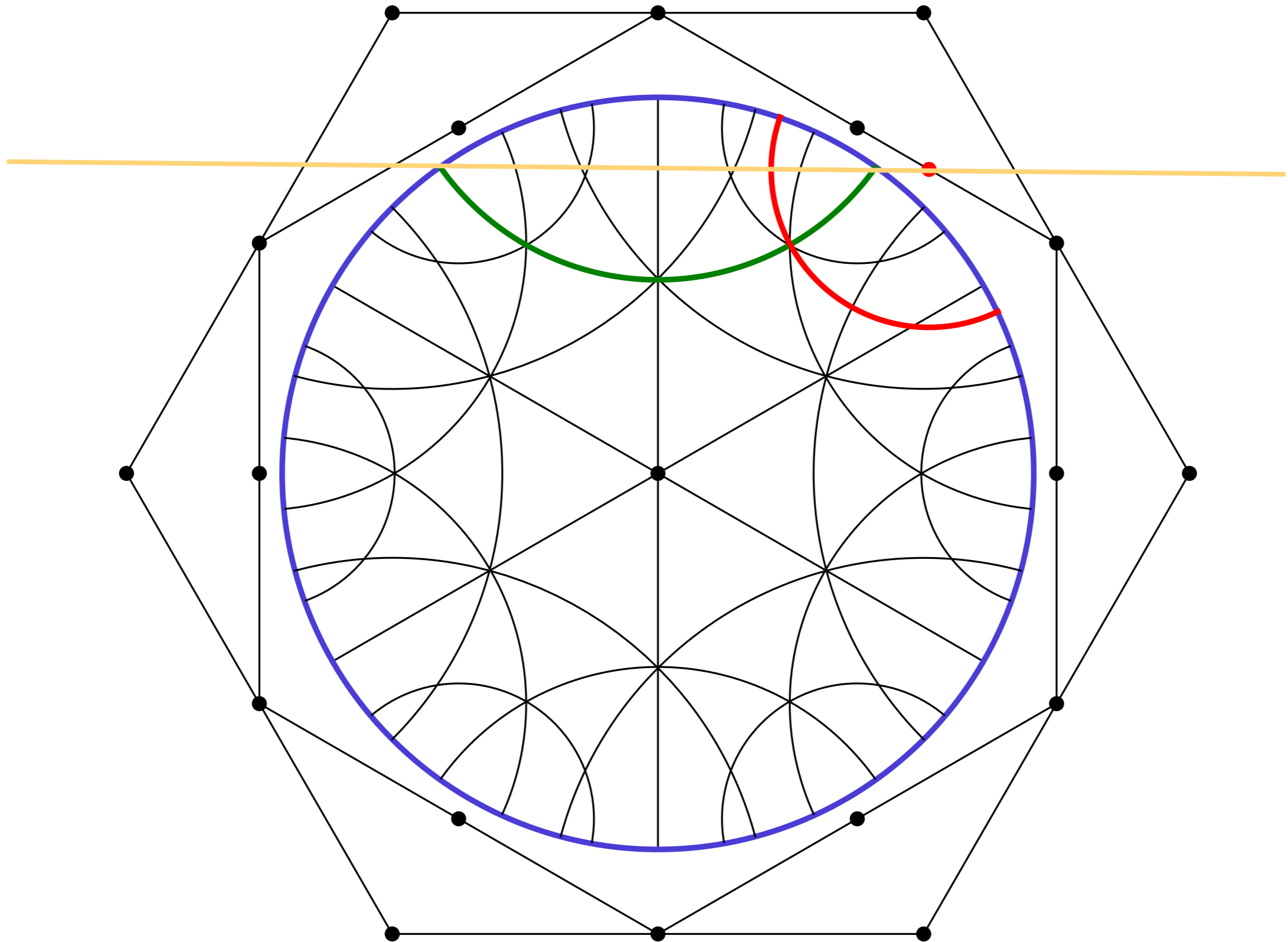


青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？



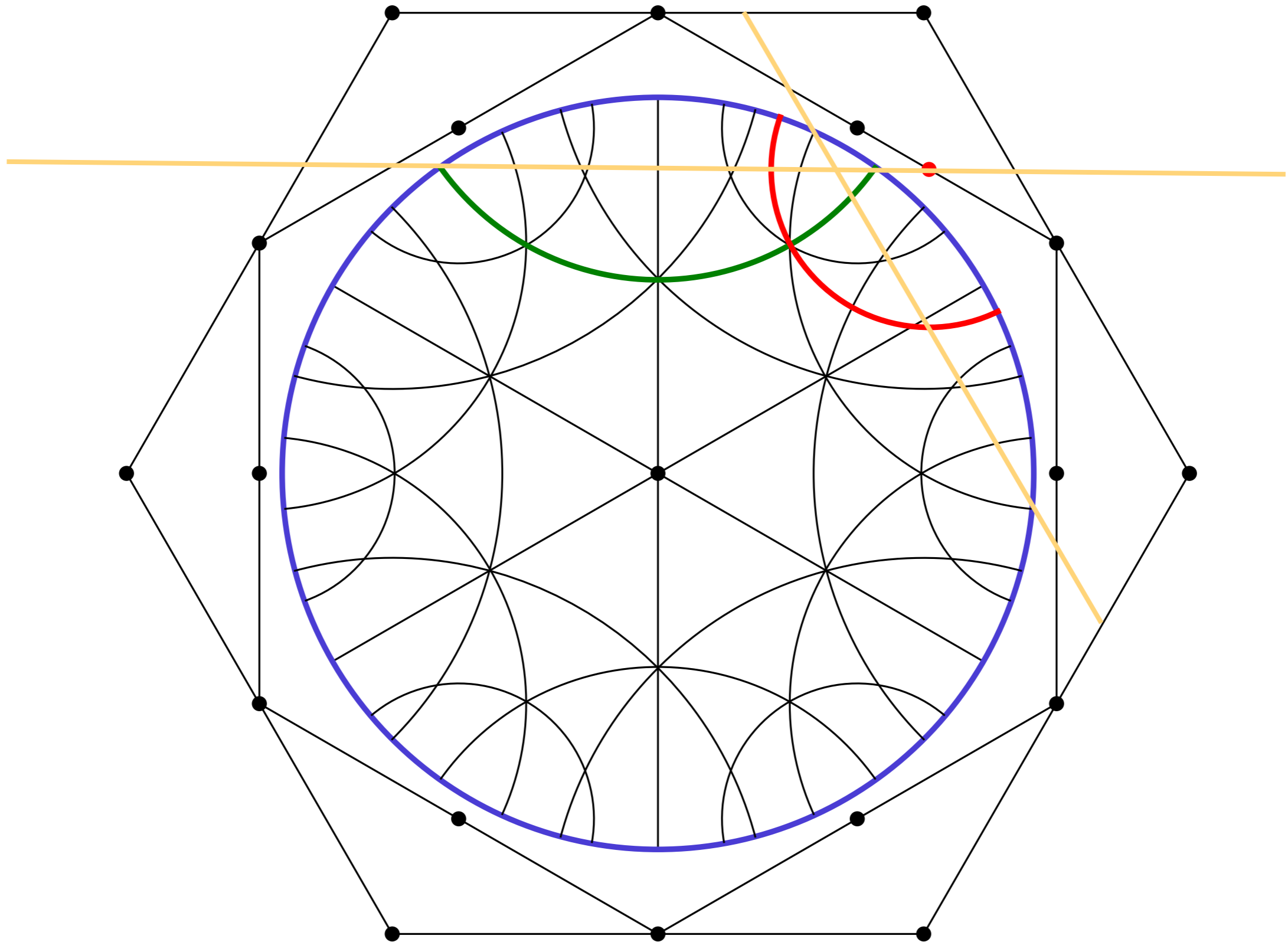
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



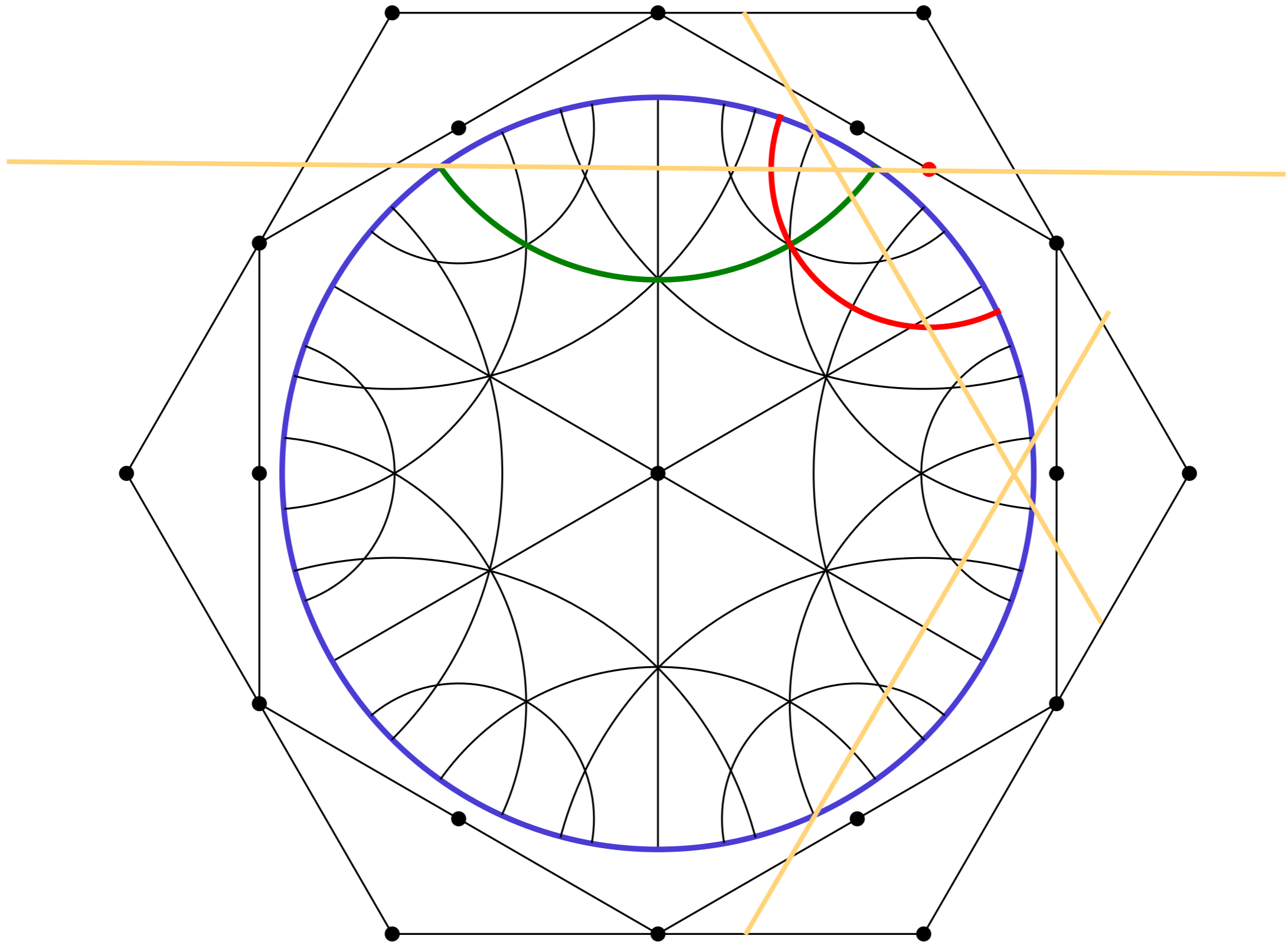
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



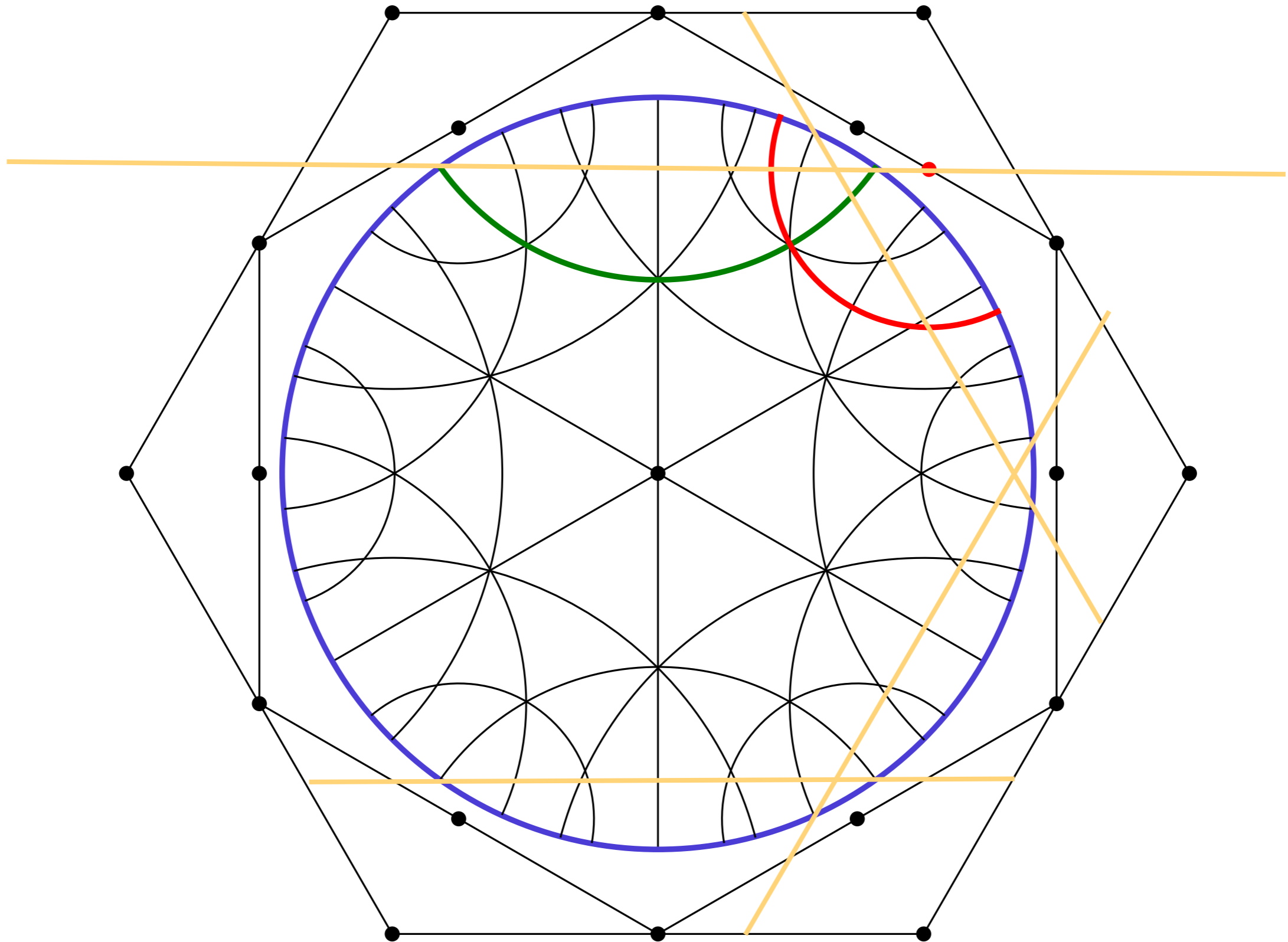
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



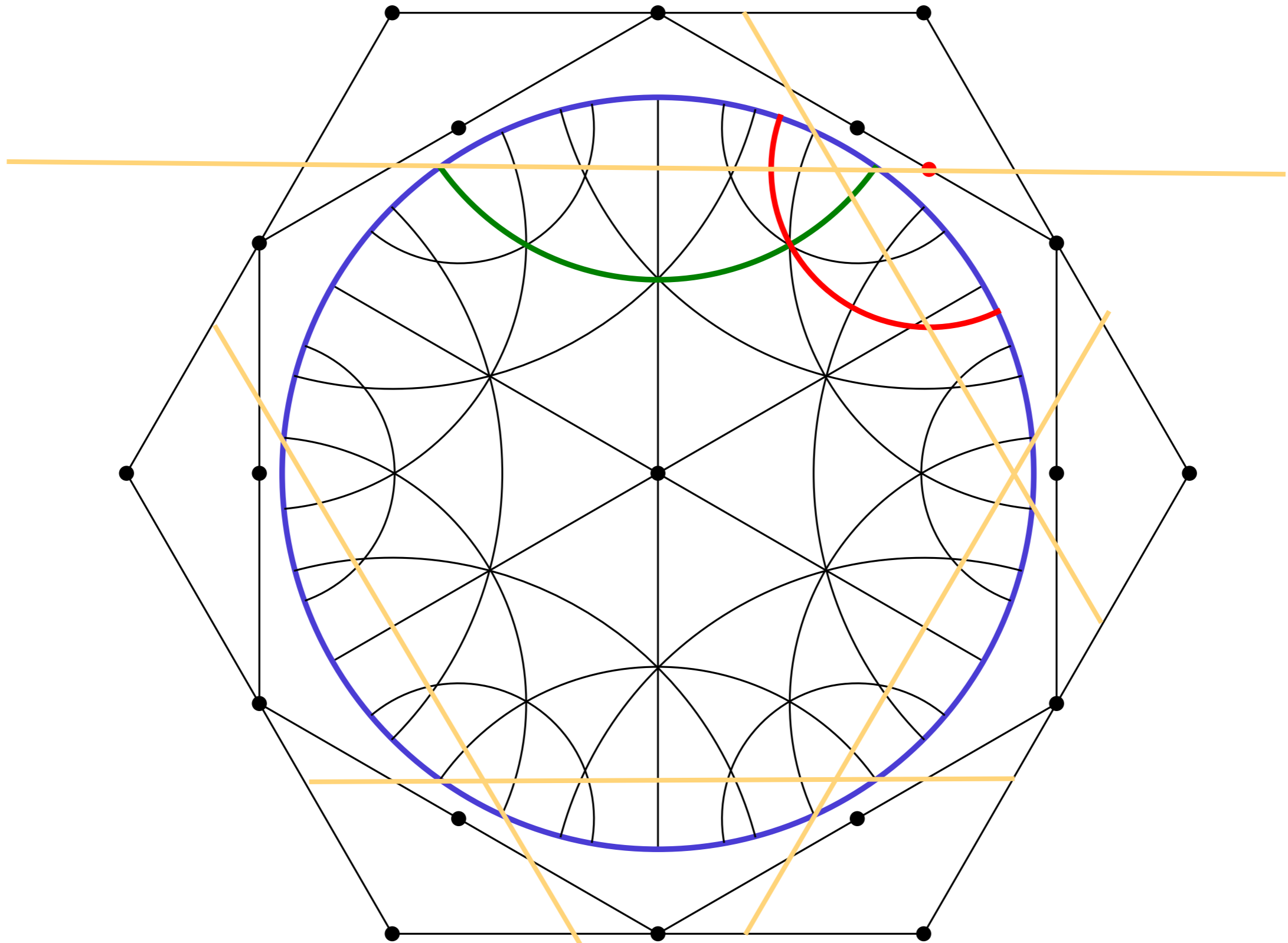
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



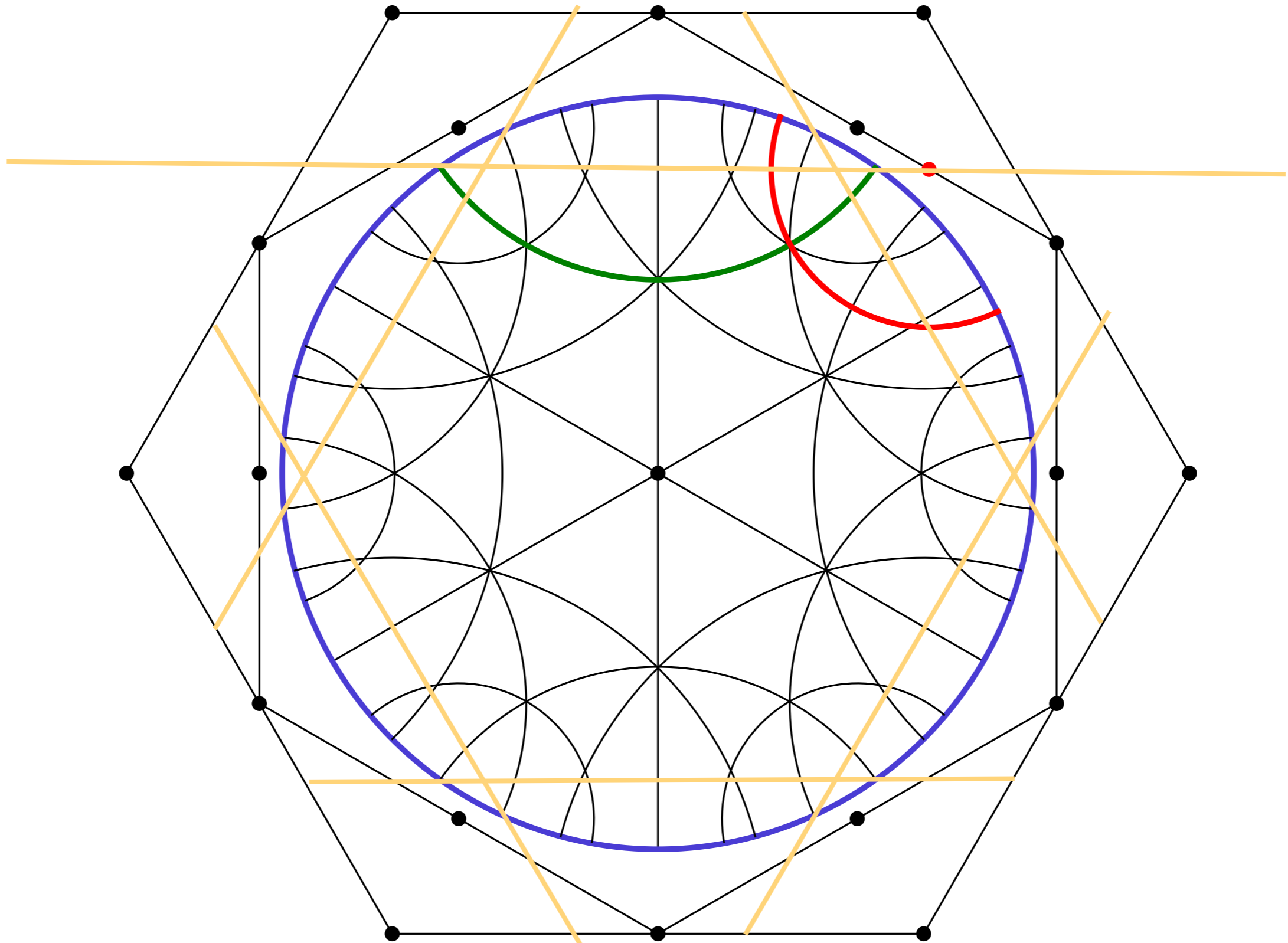
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



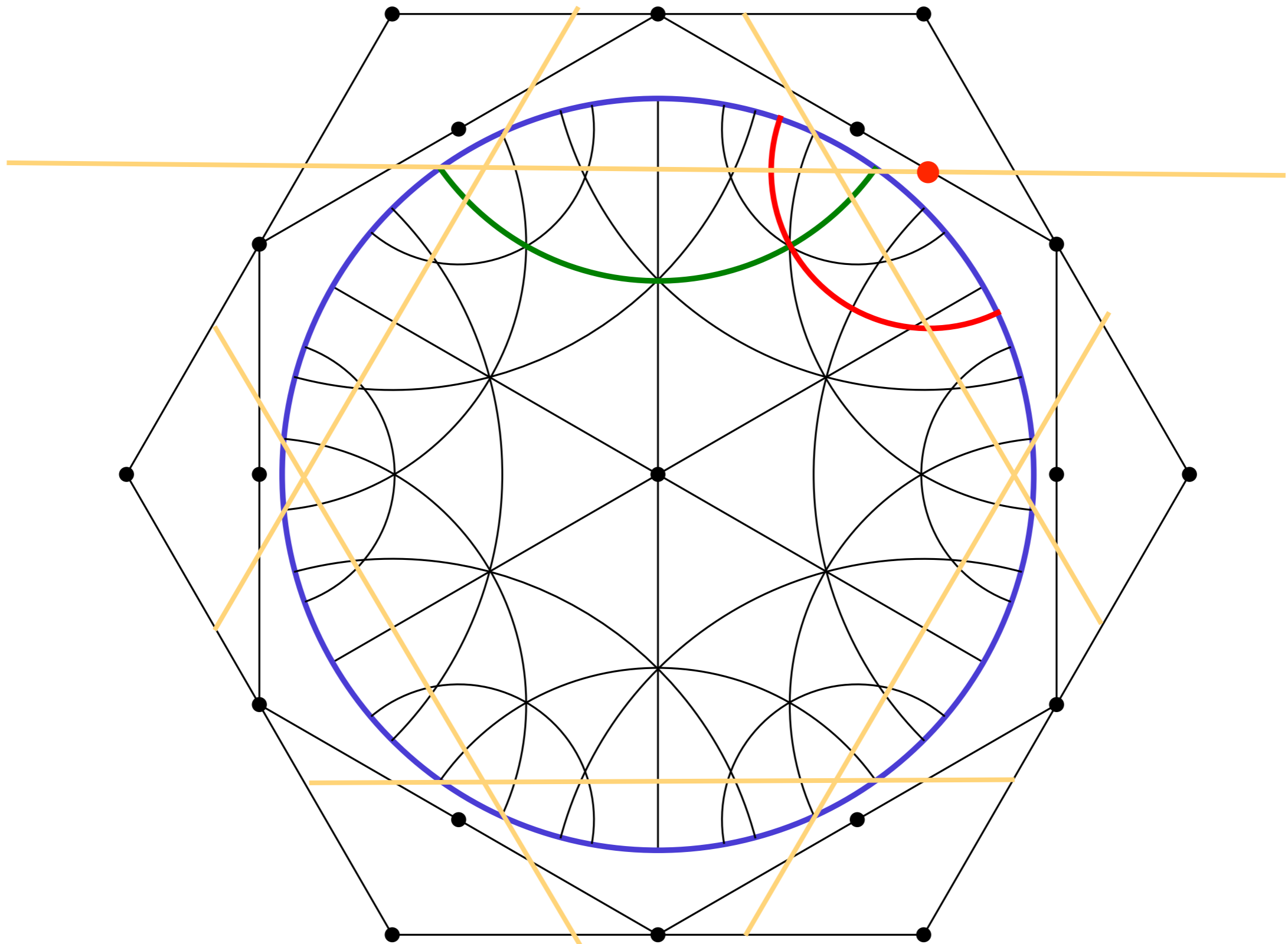
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



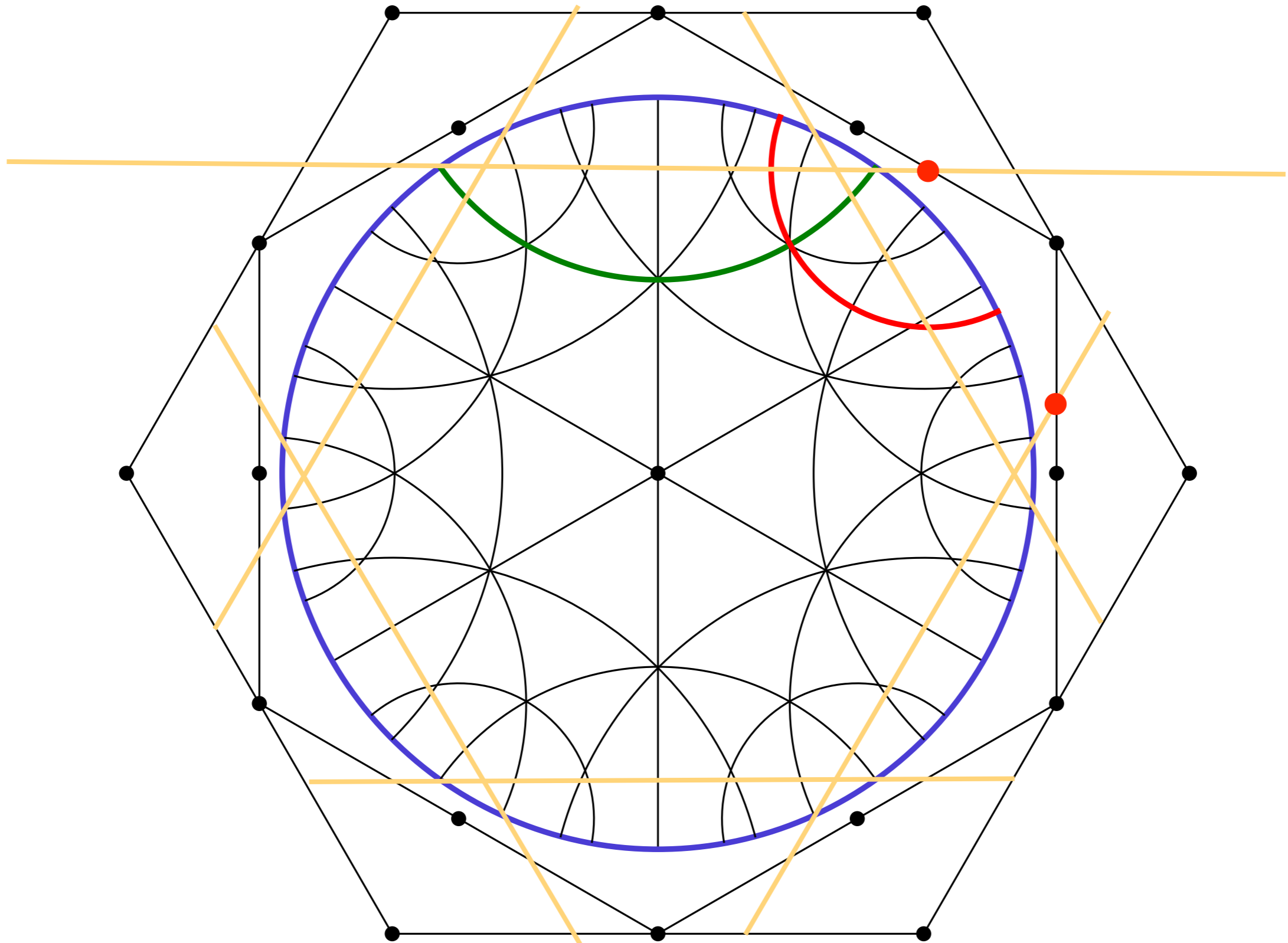
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



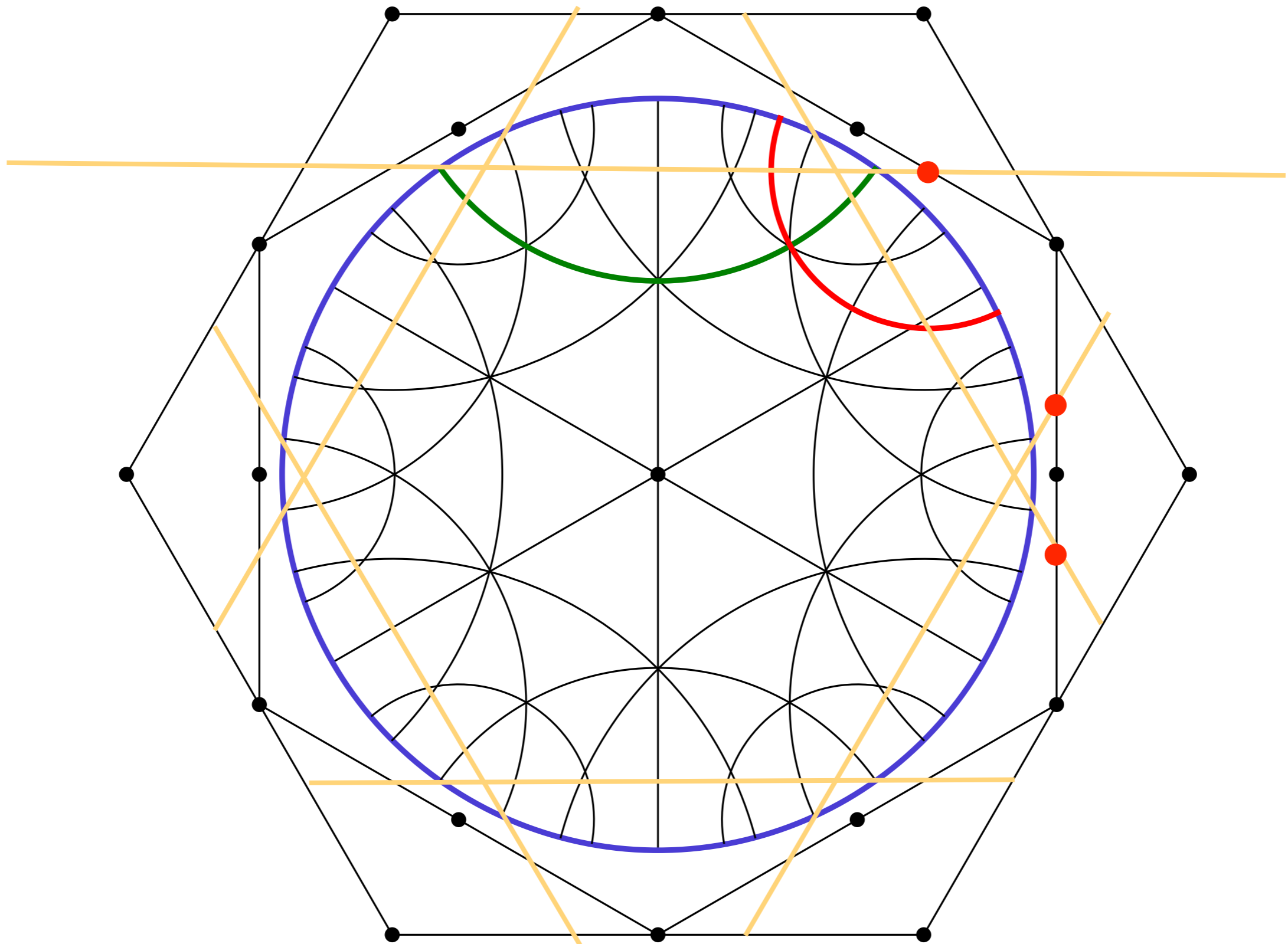
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



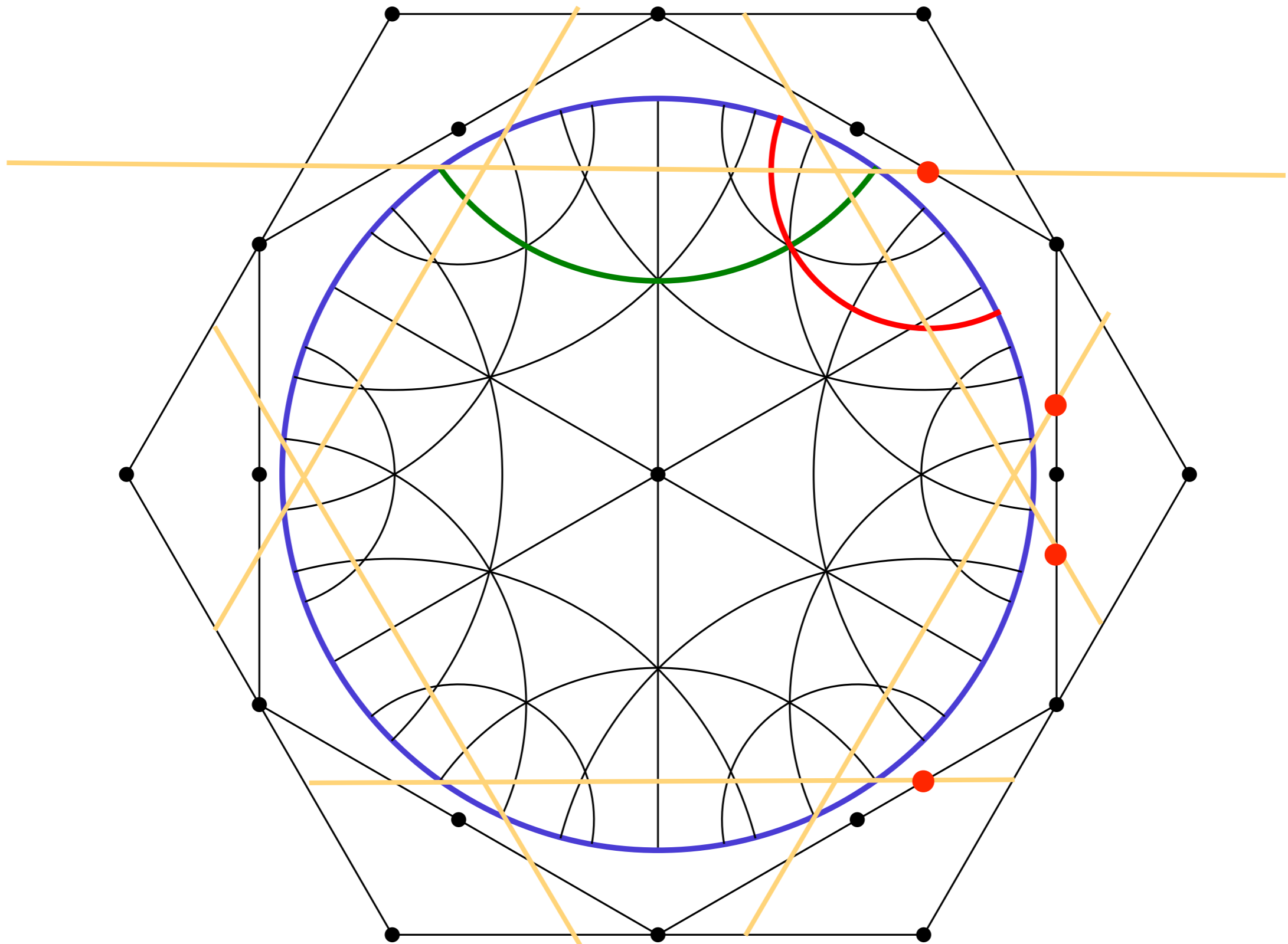
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



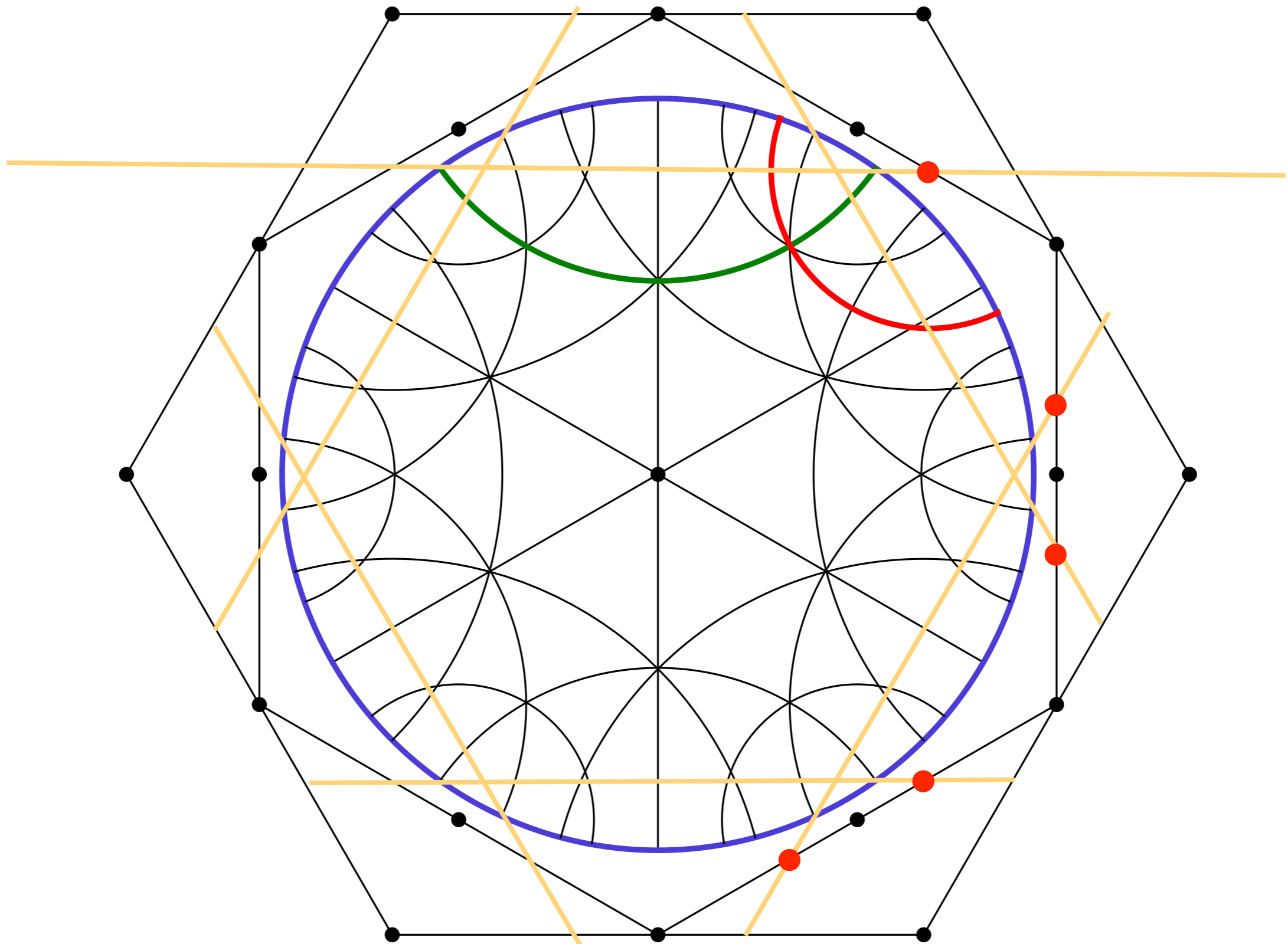
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



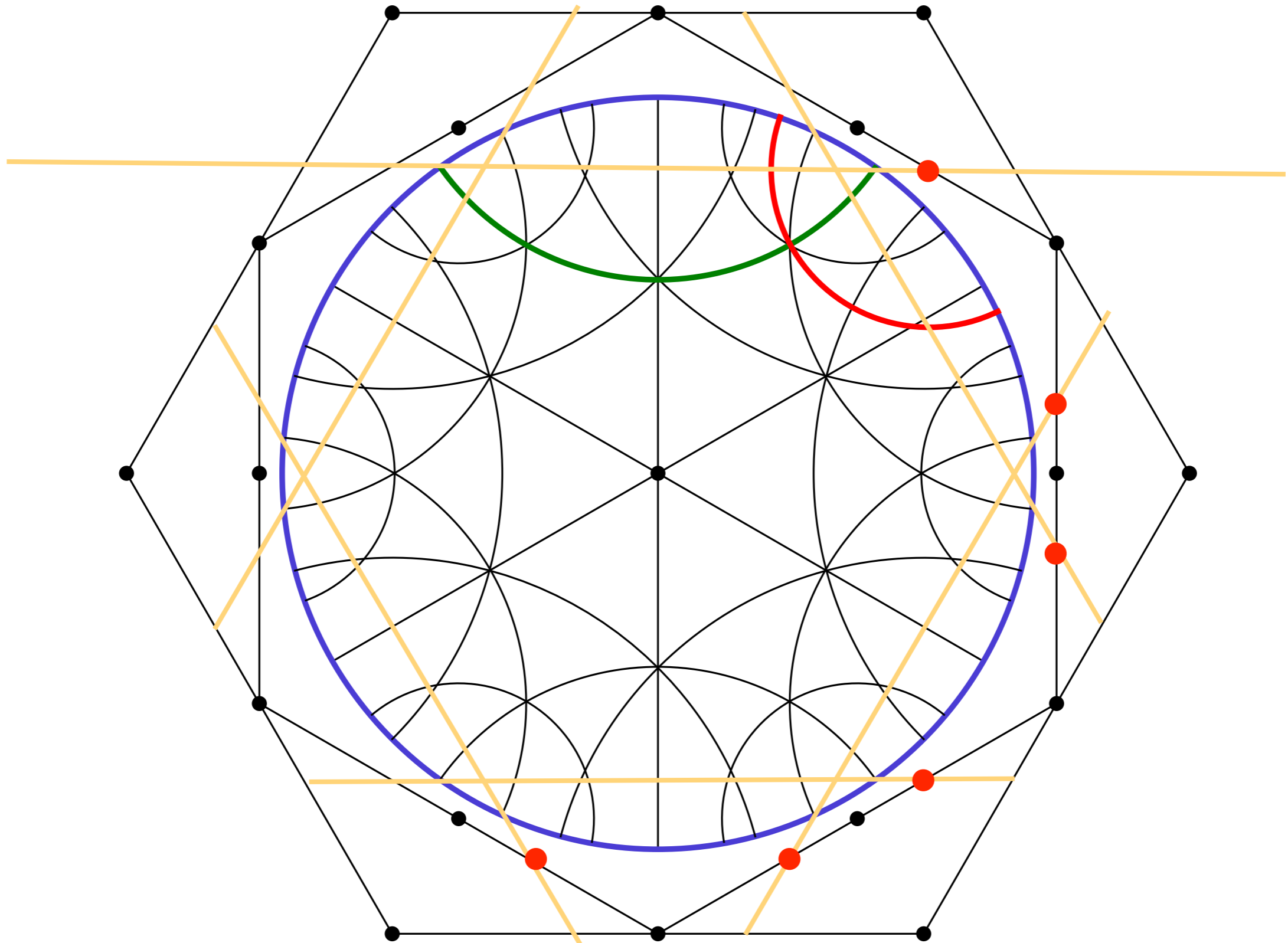
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



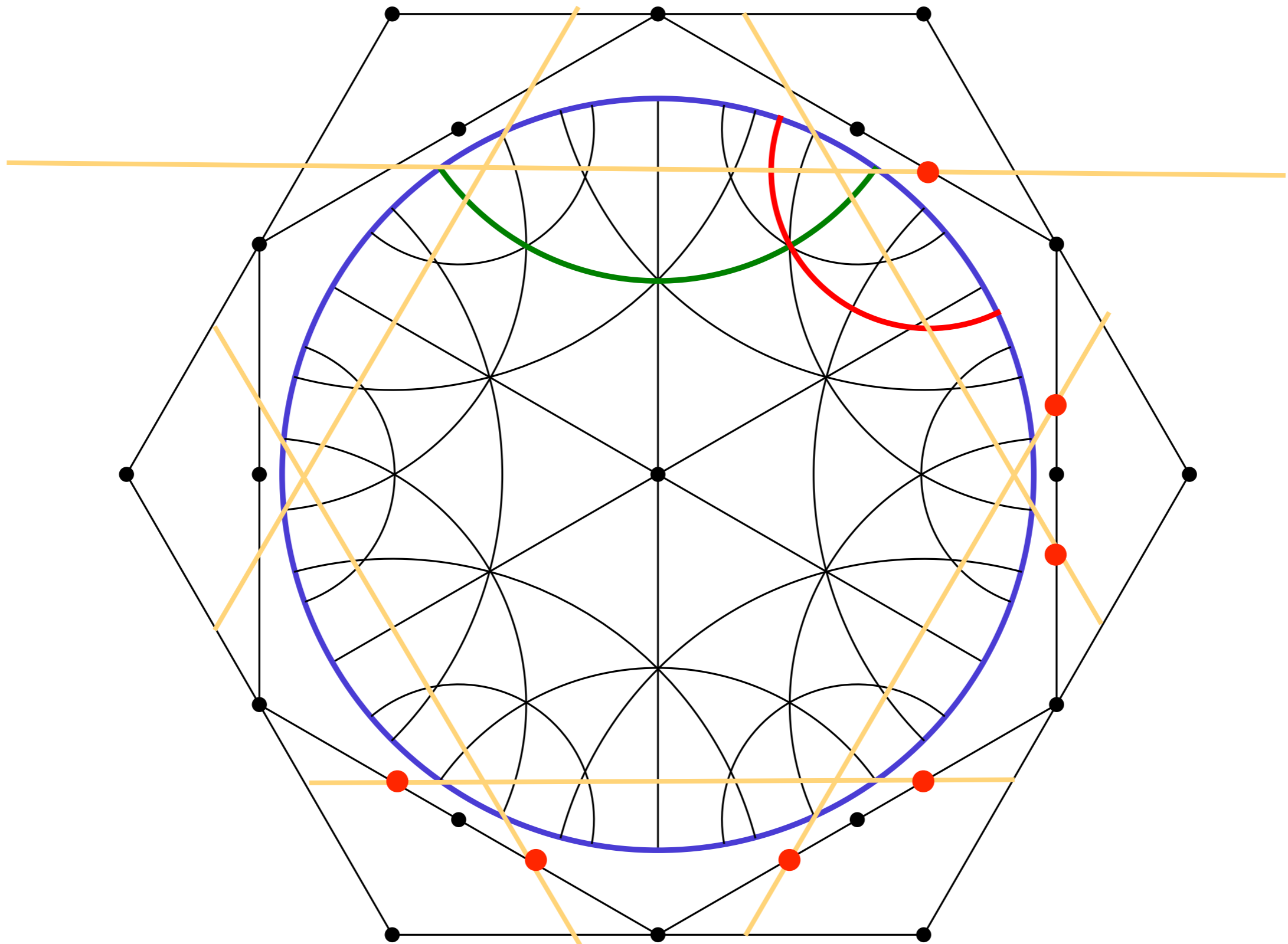
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



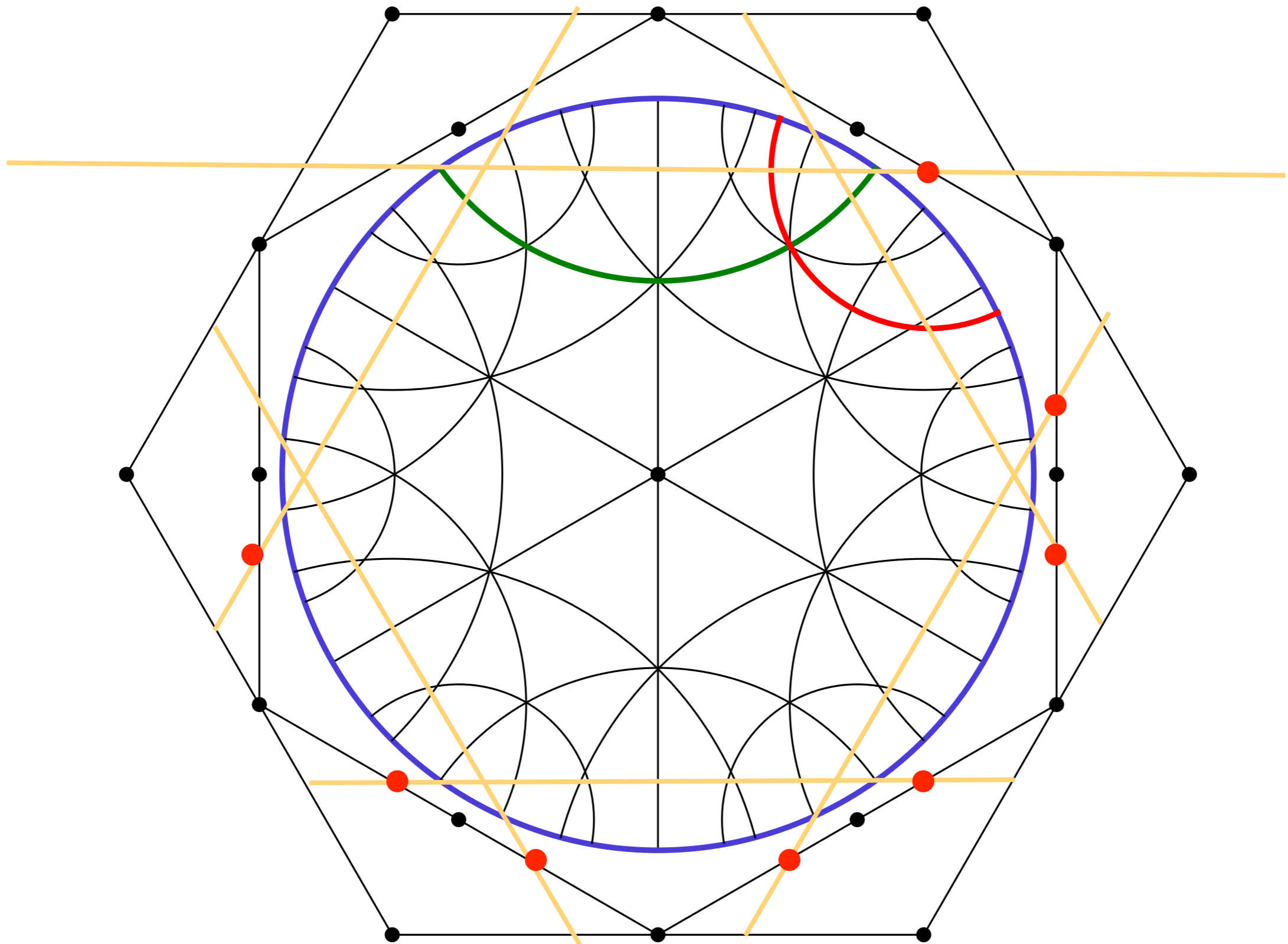
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



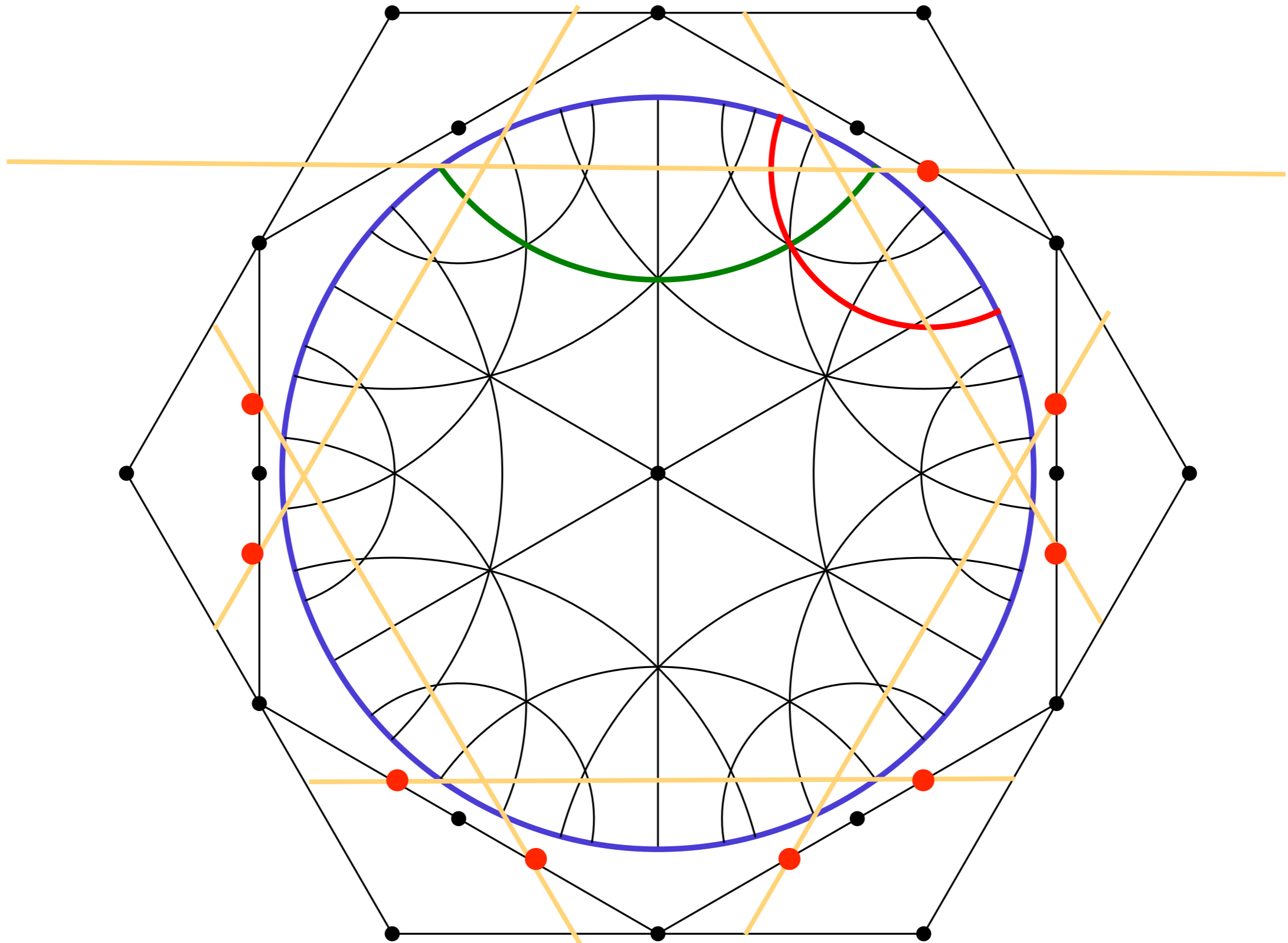
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



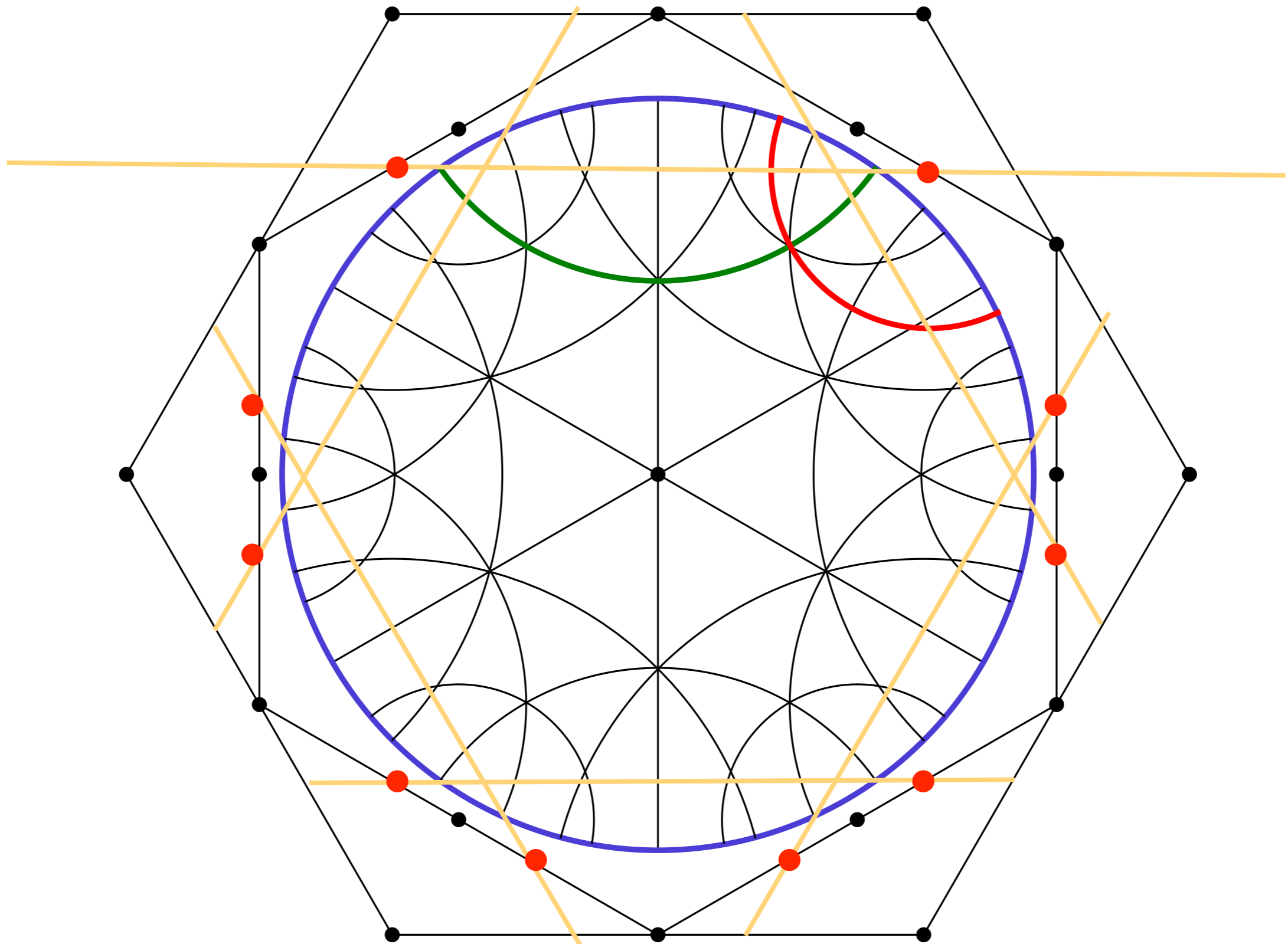
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



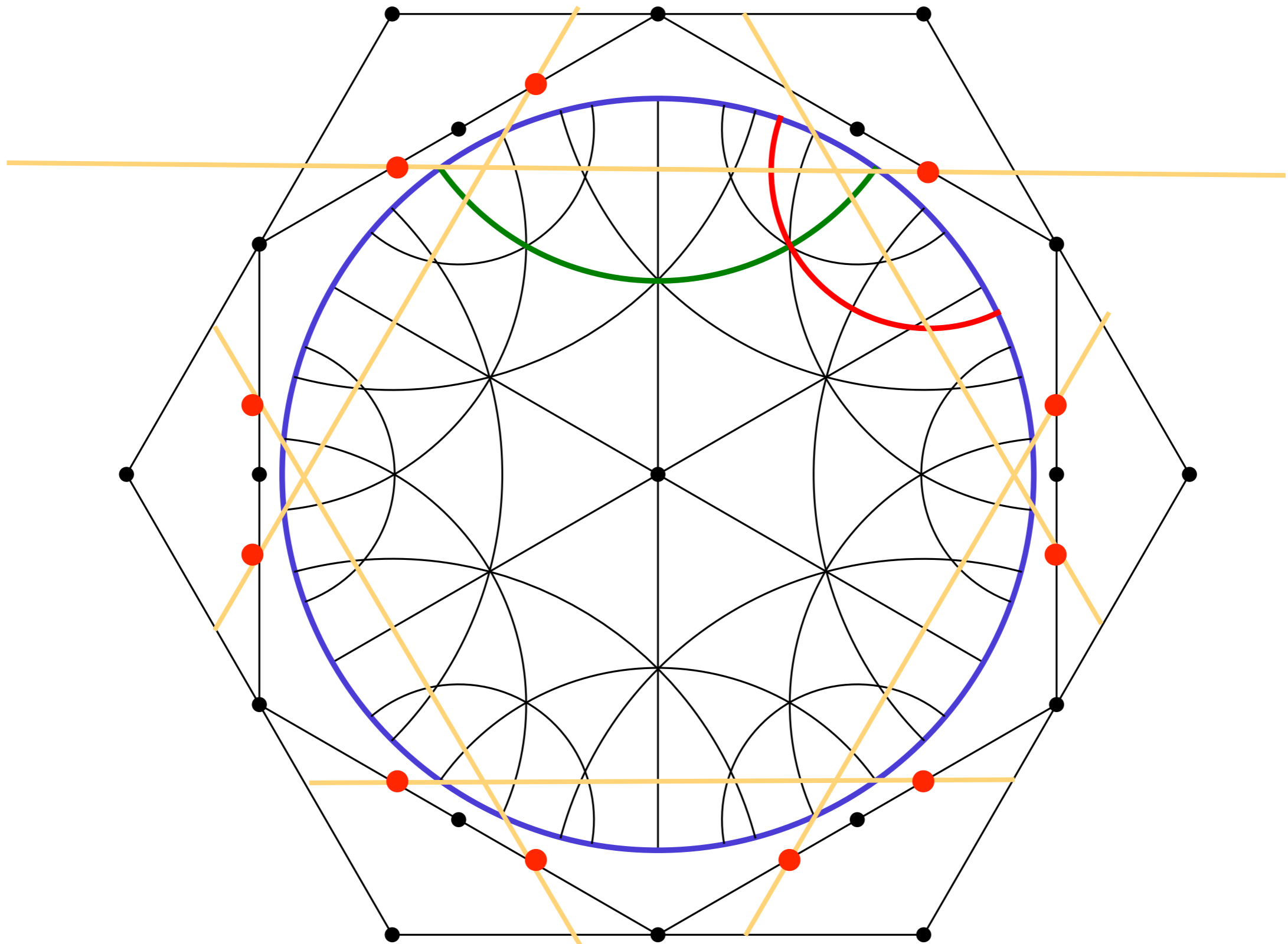
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



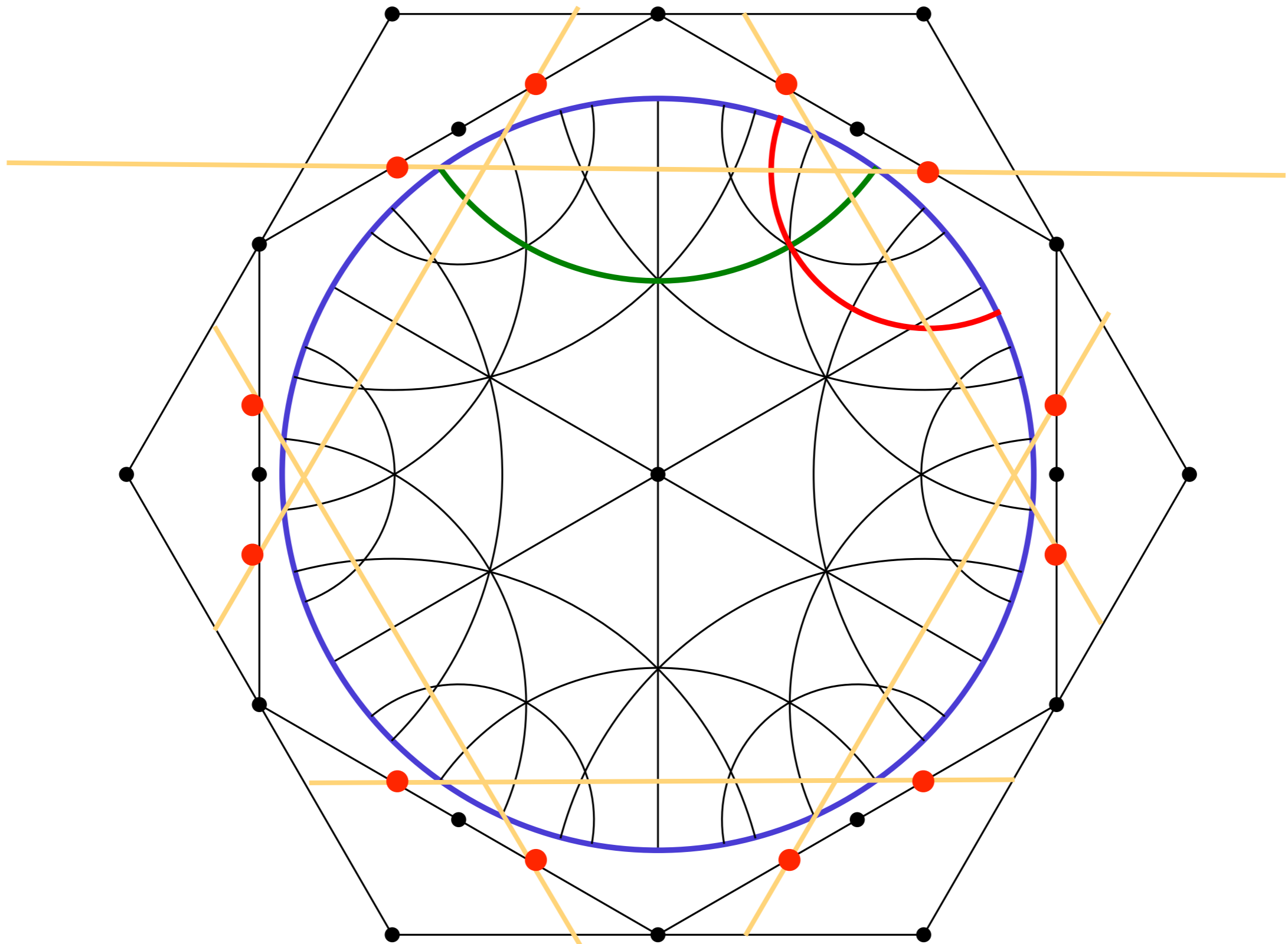
青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点

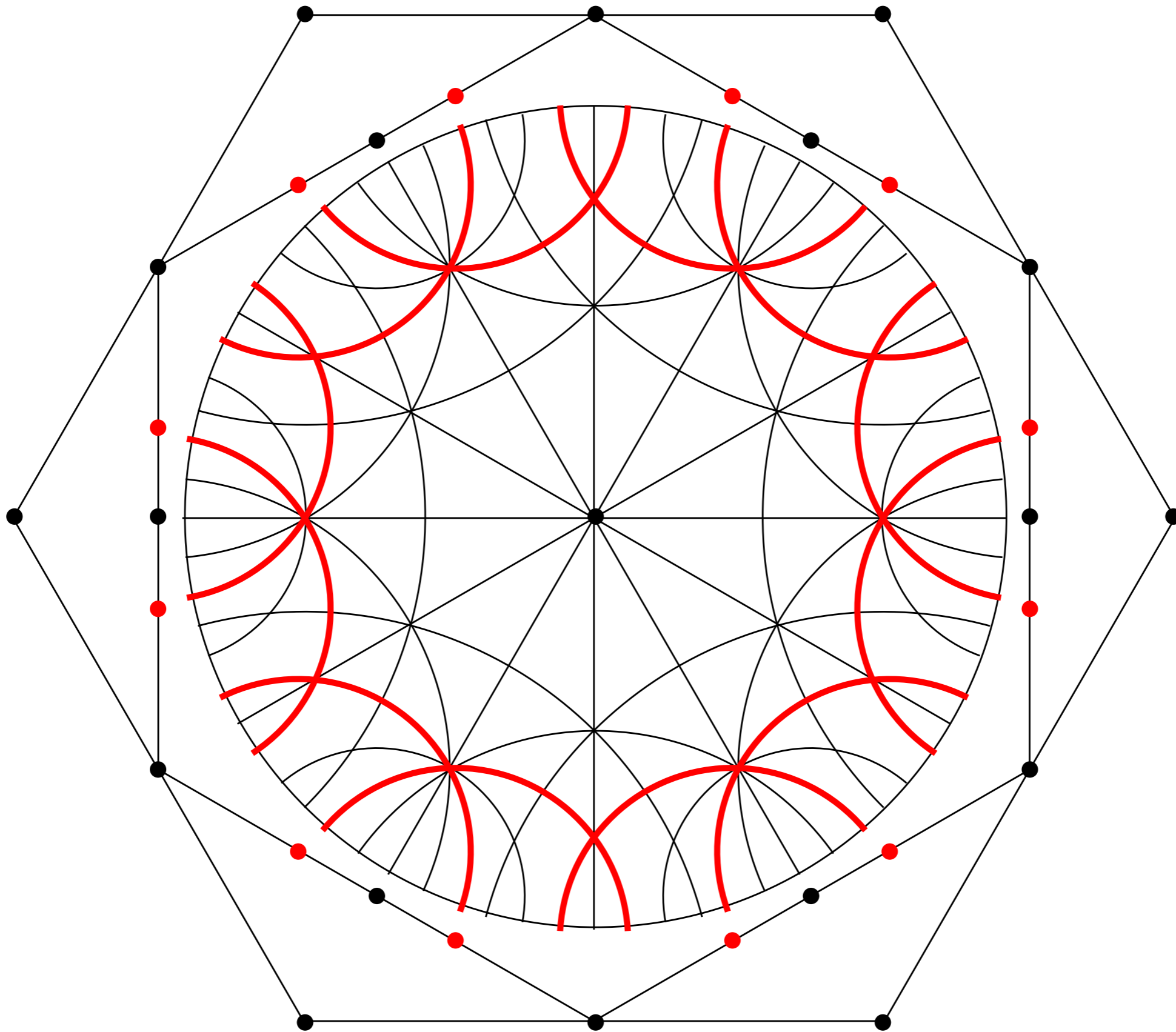


青と緑の円に直交する赤い円の中心はどこ？

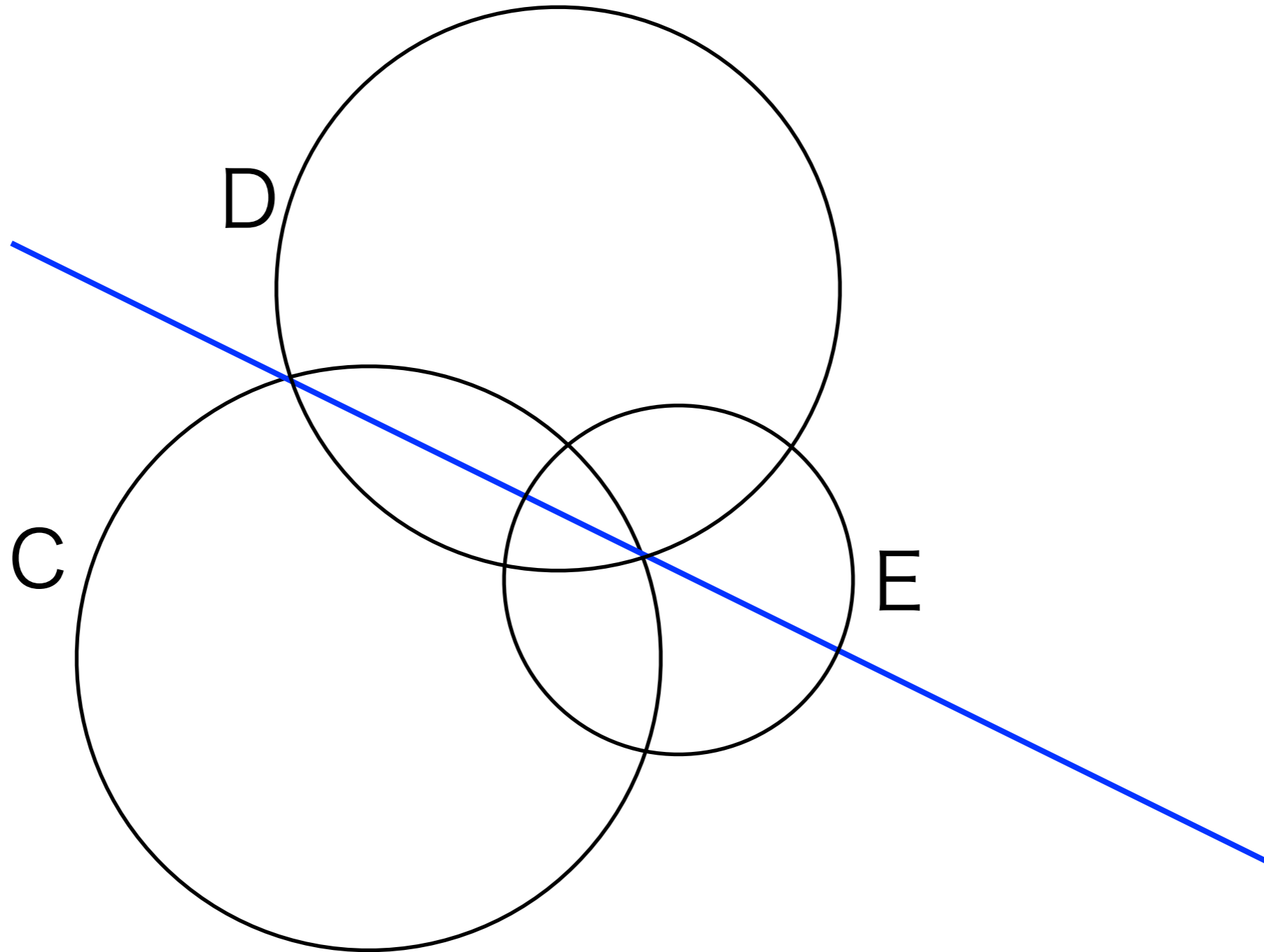
青と緑の円に交点を結ぶ直線と6角形の辺の交点



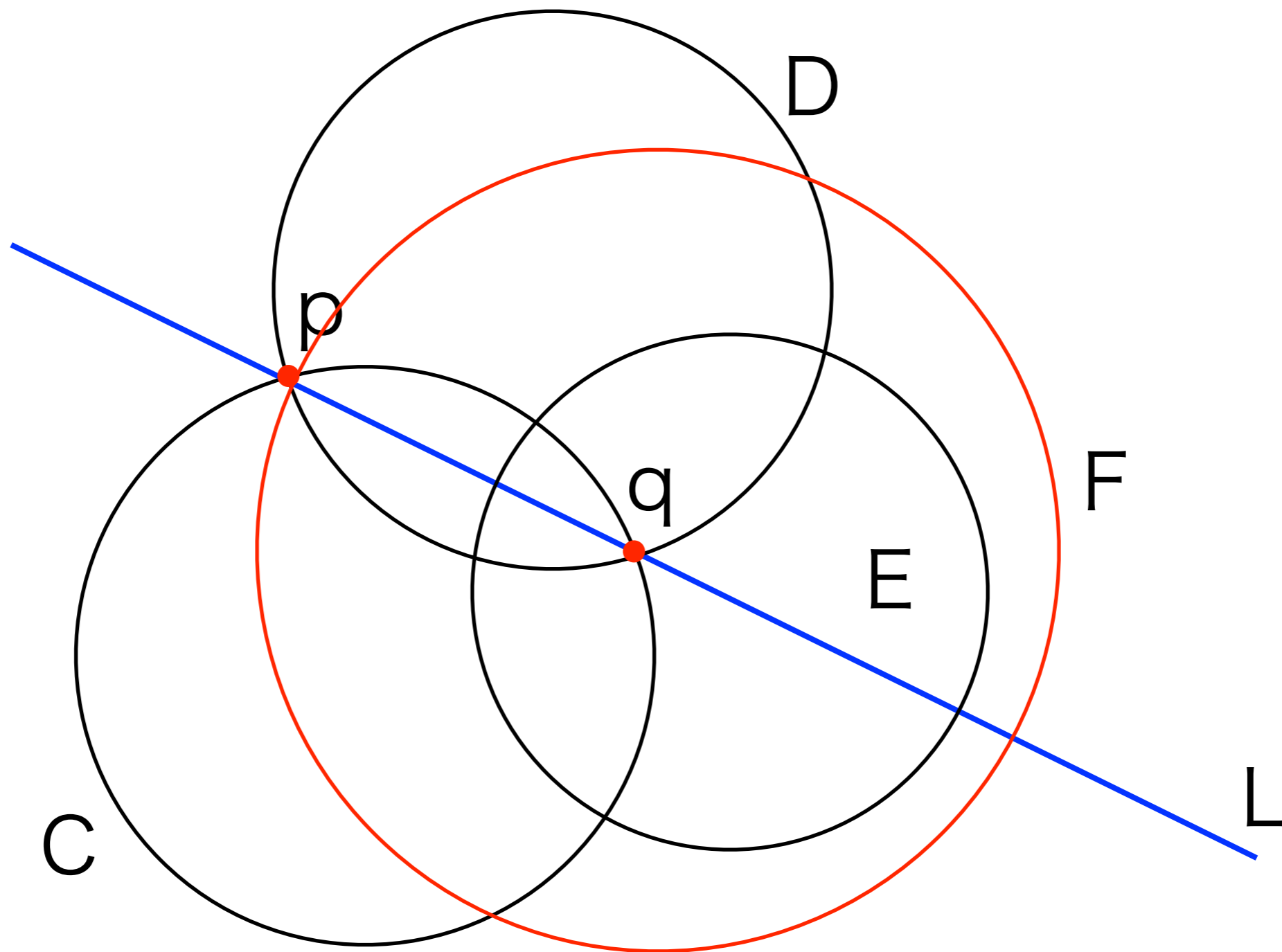
さっきの原理で円を12個書く

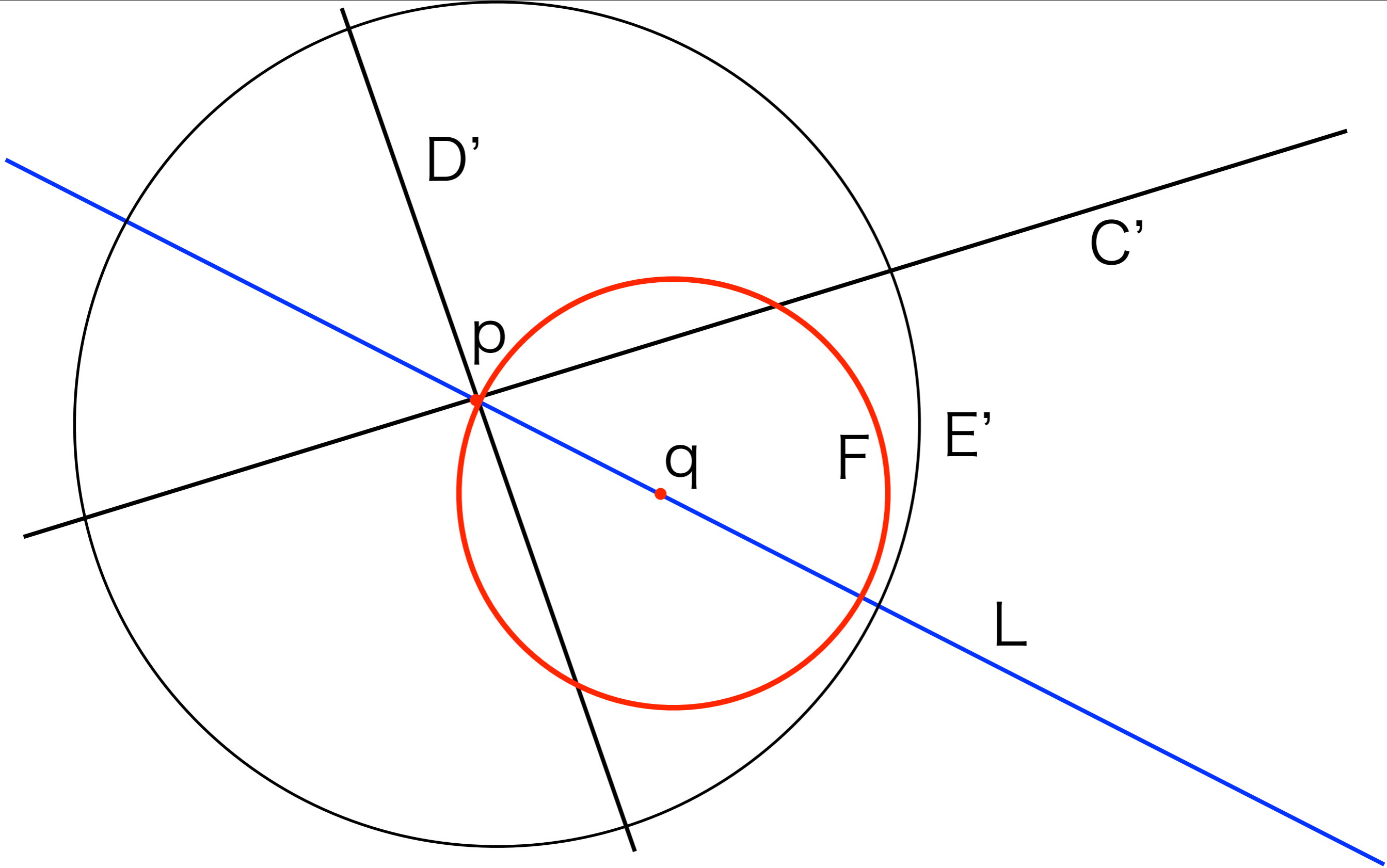


定理：二つの交差する円C, Dを考える. 円C, Dに直交する円Eの中心はCとDの交点を通る直線上にある.



p を通る q を中心とする円を F とする. F による円 C, D の反転は p を通る直線 C', D' になる.





円E'は直線C'とD'に直交するのでE'の中心はp. よって円E'とLは直交する. 従って円EとLも直交する. これからEの中心もLの上にあることが分かる.

参考文献

B. Casselman: How Did Escher Do It?
Monthly Essays on Mathematical Topics,
AMS, 2011