高校生のための現代数学講座 東京大学
「複素数」 玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　古田　幹雄 2011 年 7 月 30 日

「１次分数変換と反転」

目 次

1　はじめに

- 平面上の変換を複素数を使って考察したい。
- 平面上の相似変換は角度を保つ。また、直線を直線に写し、円を円に写す。
- 円に関する「反転」も角度を保つ。ただし直線は直線に写るとは限らず、円も円に写るとは限らない。一般には直線と円を直線あるいは円に写る。
- 上のことは方べきの定理を用いて幾何学的にアプローチすることができた。
- しかし、ここでは、別の方法として複素数を用いる考察を行いたい。
- さらに、直線と円を直線あるいは円に写すより一般の変換を紹介する。
- また、直線や円をもっと別の曲線に写すが、それにもかかわらず角度は保つ変換についても紹介する。
- 具体的には、以下のことを説明したい。

●平面上の点を複素数で表示する。このとき、１次式

$$z \mapsto \alpha z + \beta, \qquad (\alpha \neq 0)$$

によって表示される変換は相似写像であり、次を満たす。

1. 直線を直線に写し、円を円に写す。
2. 角度を保つ。
3. 図形が裏返しになることは無い。

(逆に、上の性質を満たす変換は１次式で表示可能である。)

●多項式の比（分数式）によって表される変換

$$z \mapsto \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

は次を満たす。

1. （一般には）直線や円を直線や円には写さない。
2. 曲線同士の交わる角度を保つ。
3. 図形が裏返しになることは無い。

(逆に、上の性質を満たす変換は[1]必ず分数式で表示可能であることが知られている。)

●１次分数式

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

によって表示される変換は次を満たす。

1. 直線や円を直線や円に写す。
2. 曲線同士の交わる角度を保つ。
3. 図形が裏返しになることは無い。

(逆に、上の性質を満たす変換は必ず１次分数式で表示可能であることが知られている。)

●「線対称」は図形が裏返しになる変換である。「反転」も図形が裏返しになる変換である。「反転」によって直線と円がふたたび直線あるいは円に写ることを複素数を用いて直接計算で示すことができる。

[1]実は、この主張の成立のためには、さらに「定義域と値域に**無限遠点**も含めて変換が手儀されていること」が仮定として必要である。後で平面を球面から１点を除いた図形との対応を与える。この１点が**無限遠点**に相当する。すなわち正確な条件は「変換が球面から球面への連続な変換とみなすことができるとき」である。

2　複素数と相似変換

複素数の表示と演算

- [極座標] 偏角 θ と原点からの絶対値 $r \geq 0$ による表示。

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- [和] 位置ベクトルの和
- [積] 偏角は和、絶対値は積
- [共役複素数] $z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad \bar{z} = x - iy$
- [絶対値] $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は原点からの距離：$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- [共役複素数の積] $\quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- [絶対値と共役複素数との関係] $\quad |z|^2 = z\bar{z}$
- [逆数と共役複素数との関係] $\quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

複素平面上の相似変換

- [平行移動]

  複素数 a によって表される位置ベクトルに対応する平行移動。

$$z \mapsto z + a$$

- [実軸に関する線対称]

$$z \mapsto \bar{z}$$

- [原点を中心とする回転]

  角度 θ の回転：偏角 θ, 絶対値 1 の複素数 $e = \cos\theta + \sin\theta$ を掛ける。

$$z \mapsto ez$$

- [回転＋拡大縮小]

  角度 θ の回転と r 倍拡大（縮小）: $a = r(\cos\theta + \sin\theta)$ を掛ける。

$$z \mapsto az$$

- [裏返しにならない相似変換]

  α をゼロでない複素数とする。β を任意の複素数とする。

$$z \mapsto \alpha z + \beta$$

- [裏返しになる相似変換]

  α をゼロでない複素数とする。β を任意の複素数とする。

$$z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$$

演習問題

- 原点を中心とする 45° 回転を表示せよ。
- 点 i を中心とする 45° 回転を表示せよ。
- 原点中心の 45° 回転を行い、さらに実軸の正の方向に距離 2 だけ平行移動する合同変換を表示せよ。
- 実軸に対して、原点中心の 45° 回転を行い、さらに実軸の正の方向に距離 2 だけ平行移動して得られる直線を ℓ とおく。ℓ による線対称変換を表示せよ。

3 複素平面上の直線と円

- 複素平面上の点 z から実軸に垂線をおろす。垂線の足を求めよう。$z = x + iy$ を使って x を表示すればよい：

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

  垂線の足が実軸のプラスの向きにあるか、マイナスの向きにあるかは、この値がプラスであるか、マイナスであるかによってわかる。

- e を絶対値 1 の複素数とする。原点を通る e 方向の直線を ℓ_e とする。複素平面上の点 z から ℓ_e に垂線をおろす。原点から垂線の足までの距離を求めよう。ℓ_e が実軸の場合に帰着させたい。

  原点を中心とする回転によって実軸を ℓ_e に写すことができる。この回転は e の掛け算によって表示される。$z = ez_0$ のとき次の実数の絶対値が求める距離である。

$$\frac{1}{2}(z_0 + \bar{z}_0) = \frac{1}{2}(\frac{z}{e} + \frac{\bar{z}}{\bar{e}})$$

  ただし、原点から見て、垂線の足が e と同じ向きにあるときはこの値はプラスである。原点から見て、垂線の足が e と反対向きにあるときはこの値がマイナスである。e の絶対値が 1 なので $1/e = \bar{e}$ となる。これを用いて書きなおすと

$$\frac{1}{2}(\bar{e}z + e\bar{z})$$

- e を絶対値 1 の複素数とする。原点から距離 r にあり、e の位置ベクトルと垂直な直線を複素数によって表示する。

$$r = \frac{1}{2}(\bar{e}z + e\bar{z})$$

- α を中心とする半径 r の円の方程式を複素数によって表示する。

$$r = |z - \alpha|$$

二乗して右辺を変形する。

$$r^2 = |z - \alpha|^2 = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

展開し、変形する。

$$r^2 = z\bar{z}z - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2$$

ここで $A = |\alpha|^2 - r^2$ とおく。A は $A < |\alpha|^2$ を満たす実数であり、

$$z\bar{z} + A = \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$$

となる[2]。

演習問題

- ２つの複素数 a, b に対して、両者を結ぶ線分の垂直二等分線を、複素数を用いて表示せよ。
- $1 + i$ を中心とする半径 5 の円を、複素数を用いて表示せよ。その円の上に $4 + 5i$ が乗っていることを確かめよ。

4 逆数をとる変換

- 0 でない複素数 z に対して**逆数**をとる変換

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

を考える。$w = 1/z$ とおく。逆の変換は $z = 1/w$ であり同じ形になる。

- 逆数をとる変換に対して直線

$$r = \frac{1}{2}(\bar{e}z + e\bar{z}), \qquad (|e|\ 1, r \geq 0)$$

がどう写されるかを計算する。直線の方程式に $z = 1/w$ を代入し、変形する。

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{e}}{w} + \frac{e}{\bar{w}}\right)$$

次の２つの場合にわけて考察する。

[2] あるいは $|z|^2 + A = \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$

(1) 直線が原点 $z=0$ を通らないとき：$r>0$ である。$w\bar{w}/r$ を両辺にかけて

$$w\bar{w} = \left(\frac{\bar{e}}{2r}\bar{w} + \frac{e}{2r}w\right)$$

これは $\bar{e}/(2r)$ を中心とし、原点を通る円である。

(2) 直線が原点 $z=0$ を通るとき：$r=0$ である。$w\bar{w}$ を両辺にかけて

$$0 = \frac{1}{2}(\bar{e}\bar{w} + ew)$$

これは $\bar{e}$ の位置ベクトルと平行な、原点を通る直線である。

- 逆数をとる変換に対して円

$$z\bar{z} + A = \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}, \qquad (A < |\alpha|^2)$$

がどう写されるかを計算する。円の方程式に $z = 1/w$ を代入し、変形する。

$$\frac{1}{w\bar{w}} + A = \frac{\bar{\alpha}}{w} + \frac{\alpha}{\bar{w}}$$

次の 2 つの場合にわけて考察する。

(1) 円が原点 $z=0$ を通らないとき：$A \neq 0$ である。$w\bar{w}/A$ を両辺にかけて

$$\frac{1}{A} + w\bar{w} = \frac{\bar{\alpha}}{A}\bar{w} + \frac{\alpha}{A}w$$

ここで $B = 1/A, \beta = \bar{\alpha}/A$ とおくと

$$w\bar{w} + B = \bar{\beta}w + \beta\bar{w}$$

となる[3]。よって変換後の図形も円である。

(2) 円が原点 $z=0$ を通るとき：$A = 0, \alpha \neq 0$ である。$w\bar{w}$ を両辺にかけて

$$1 = \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w$$

ここで $r = 1/(2|\alpha|), e = \bar{\alpha}/|\alpha|$ とおくと

$$r = \frac{1}{2}(\bar{e}w + e\bar{w})$$

となる。よって変換後の図形は直線である。

演習問題 (チャレンジ問題)

- 「円周角の定理」に対して複素数を用いた証明を試みよ。
- 「方べきの定理」に対して複素数を用いた証明を試みよ。

[3] ここで $|\beta|^2 - B = (|\alpha|^2 - A)/A^2 > 0$

5 角度を保つ変換

- 平面から平面への写像
$$(x, y) \mapsto (2x, 3y)$$
は直線を直線に写す。しかし角度を保たない。円は楕円に写る。

- 平面から平面への写像
$$(x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$$
は一般に直線を曲線に写す。しかし**角度を保つ**ことを複素数を用いて示そう。

- 複素数を用いるとこの変換は次のように2次式によって表示できる。
$$z = x + iy \Longrightarrow z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

- 複素平面上のある点 a を通る曲線 C が与えられたとする[4]。曲線 C の写った先をの曲線を D とすると D は a^2 を通る。

- 点 a における C の接線方向の微小ベクトルを w とする。ここで w は0に近い複素数である[5]。a の近くの点 $z = a + w$ は、C の上にほぼ乗っている。

- 点 a^2 における D の接線方向を次のように計算する。

  1. 「a から $z = a + w$ に向かうベクトル」がどう写されるかを計算する。
  $$z = a + w \mapsto z^2 = (a + w)^2 = a^2 + 2aw + w^2$$
  よって「a^2 から $a^2 + 2aw + w^2$ に向かうベクトル」に写される。このベクトルは
  $$2aw + w^2$$
  である。
  2. w^2 は $2aw$ の長さにくらべて小さい[6]。これを無視する近似を考えると、写ったさきのベクトルは $2aw$ である。
  3. 微小ベクトルの変換として近似的に
  $$w \to 2aw$$
  が得られた。
  4. w の大きさが小さいとき、上の考察における近似はいくらでもよくなる。よって点 a^2 における D の接線方向は $2aw$ である。

- 点 a においてふたつの曲線 C_1, C_2 がある角度をなして交差していたとしよう。変換によって点 a^2 を通るふたつの曲線 D_1, D_2 が得られる。C_1, C_2 の接線方向の微小ベクトル w_1, w_2 をとる。D_1, D_2 の接線方向の微小ベクトルは $2aw_1, 2aw_2$ である。

[4] たとえば $a = 2 + 3i$
[5] たとえば $|w| < 1/10000$
[6] さっきの例では 1/1000 倍未満である

- 微小ベクトル間の変換 $w \mapsto 2aw$ は、回転と拡大縮小であり、**相似変換**となる。相似変換は角度を保つ。よって、**曲線 D_1, D_2 のなす角度は曲線 C_1, C_2 のなす角度と等しい。**

- 同様の考察を
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$
に対して行う。
$$a + w \mapsto \frac{1}{a+w} = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a+w} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{w}{(a+w)a}$$
よって微小なベクトルの変換は
$$w \mapsto -\frac{w}{(a+w)a}$$
これは w が小さい時、次の変換によっていくらでもよく近似される。
$$w \to -\frac{1}{a^2}w$$
この変換は微小なベクトルの回転と拡大縮小であり、**相似変換**となる。

- 上のふたつの例
$$z \mapsto z^2, \qquad z \mapsto \frac{1}{z}$$
において、微小なベクトルの変換は、回転と拡大縮小によって与えられた。それは、**裏返しにならない相似変換**である。

- 平面から平面への変換が、複素数の多項式の比（分数式）によって表示される場合も同様である。

演習問題

- $(x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$ において、x 軸に平行な直線たち、y 軸に平行な直線たちがどのように写されるか概形を図示せよ。

6　１次分数変換の合成

- a, b, c, d を複素数であって $ad - bd \neq 0$ を満たすものとする。このとき、次の変換を**１次分数変換** とよぶ。
$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}$$
この変換は、分母がゼロとなる点以外で定義されている。

- **1 次分数変換の合成は 1 次分数変換である。** 上の 1 次分数変換に続いて、もうひとつの 1 次分数変換

$$w \mapsto u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

を続けて行うと、

$$z \mapsto \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

となる。ここで

$$A = \alpha a + \beta c, \quad B = \alpha b + \beta d, \quad C = \gamma a + \delta c, \quad D = \gamma b + \delta d$$

である。

- 上の結果は行列の積を用いると

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書くことができる[7]。

- 任意の 1 次分数変換

$$z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}$$

は、逆数をとる変換 $z \mapsto 1/z$ と、平行移動と回転と拡大縮小の合成をいくつか合成することによって表せる。これは次のようにしてわかる。

- ケース１　1 次分数変換が、

「z の絶対値が大きくなるとき、写った先の w の絶対値もいくらでも大きくなる」

という性質をもつとき：平行移動と回転と拡大縮小の合成によって表せる。実際この条件を満たすのは $c = 0$ のときであり、1 次分数変換は 1 次式で表される。

- ケース２　上の性質を持たないとき。このとき $c \neq 0$ であり、z の絶対値が大きくなるとき、写った先の w は a/c に近づく。次の 1 次分数変換は、平行移動と逆数をとる変換の合成であり、しかも w が a/c に近づくとき写った先の u の絶対値が無限に大きくなる。

$$w \mapsto u = \frac{1}{w - (a/c)}$$

この変換の逆の変換は、逆数をとる変換と平行移動との合成である。与えられた 1 次分数変換にこの変換を合成すると、ケース１の性質をもつ。よってケース２は、ケース１と、逆数をとる変換と平行移動との合成によって表示される。

- 1 次分数変換は、直線と円を、直線あるいは円に写す。これは、任意の 1 次分数変換が、逆数をとる変換、平行移動、回転、拡大縮小の合成で表され、合成される各々の変換がその性質を持つことからわかる。

[7] この表示の背後には、複素平面上の点 z を、２つの複素数の組み (z_0, z_1) の比 z_1/z_0 の表示とみなす見方がある。$z_0 = 0$ となる比は複素平面上にはないが、「無限遠点」に対応する。

演習問題

- $$z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$$
  を、逆数をとる変換、平行移動、回転、拡大縮小たちの合成によって表示せよ。

- 上の 1 次分数変換が、直線と円を、直線あるいは円に写すことを複素数の計算によって直接示せ。

7 「反転」と「反転もどき」

- **円に関する「反転」**

  平面上に中心 O, 半径 r の円 C が与えられているとする。

  O 以外の 2 点 P, Q が**円 C に関して互いの反転である**とは、次の 3 条件を満たすことである。

  1. O, P, Q は同一直線上にある。
  2. P, Q は O から見て同じ半直線側にある。
  3. $OP \cdot OQ = r^2$

  このとき
  $$I_C(P) = Q, \qquad I_C(Q) = P$$
  と書くことにする。$I_C(P) = P$ となるのは P が円 C 上にあるときである。

- **円についての「反転もどき[8]」**

  平面上に中心 O, 半径 r の円 C が与えられているとする。O 以外の 2 点 P, Q が次の 3 条件を満たすとき、P, Q は**円 C に関して互いの「反転もどき」である**ということにしよう。

  1. P, Q は O は同一直線上にある。
  2. P, Q は O から見て反対の半直線側にある。
  3. $OP \cdot OQ = r^2$

  このとき
  $$J_C(P) = Q, \qquad J_C(Q) = P$$
  と書くことにする。$J_C(P)$ と P が一致することは決してない。

演習問題

- I_C と J_C をひき続いて行うと、点 O に関する点対称となることを示せ。

- ふたつの円 C_1, C_2 に対して、I_{C_1} と I_{C_2} をひき続いて行うとき相似変換になったとする。このとき C_1, C_2 とは同心円であることを示せ。

[8] ここだけの言い方です。

8 「反転」の複素数による表示：典型例

「反転」と「反転もどき」の典型例を、複素数を用いて表示してみる。

- 原点を中心とする半径 1 の円に関する「反転」は
$$z \mapsto K_+(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$
によって表示される。
- 原点を中心とする半径 1 の円に関する「反転もどき」は
$$z \mapsto K_-(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$$
によって表示される。

演習問題

- $K_+(z) = z$ となる条件が $|z| = 1$ であることを複素数の計算によって確かめよ。
- $K_-(z) = z$ となる z は存在しないことを複素数の計算によって確かめよ。

9 「反転」の複素数による表示：一般の場合

「反転」と「反転もどき」を複素数を用いて表示してみよう。

- 複素数 α と実数 D を固定する。α 以外の複素数 z に対する変換 $K(z)$ を
$$K(z) = \frac{\alpha\bar{z} - D}{\bar{z} - \bar{\alpha}}$$
によって定義する。
- $|\alpha|^2 > D$ のとき、$r = \sqrt{|\alpha|^2 - D}$ とおくと、K は α を中心とする半径 r の円に関する「反転」である。
- $|\alpha|^2 < D$ のとき、$r = \sqrt{D - |\alpha|^2}$ とおくと、K は α を中心とする半径 r の円に関する「反転もどき」である。
- $|\alpha|^2 = D$ のとき、任意の z に対して $K(z) = \alpha$ である。

演習問題

- 次の相似変換 F を考える。
$$F(w) = 2(w + 1 + i)$$
F は原点を中心とする半径 1 の円を、$\alpha = 1 + i$ を中心とする半径 $r = 2$ の円 C に変換することを示せ[9]。

[9] 一般には $F(w) = r(w + \alpha)$.

- 次の相似変換 G が F の逆の変換であることを確かめよ[10]。

$$G(z) = \left(\frac{1}{2}z - 1 - i\right)$$

- G, K_+, F の順番に変換を行うと、円 C に関する反転になる。これを計算してみよ。
- G, K_-, F の順番に変換を行うと、円 C に関する反転もどきになる。これを計算してみよ。

10 「反転」と球面上の変換

- 考えている平面が空間の中におかれているとする。原点を中心とする半径 1 の球面を S とおく。
- S と平面の共通部分は半径 1 の円である。その円を S の「赤道」とするとき、S の「北極」にあたる点を V_0 とおく。S から 1 点 V_0 を除いたものを S_0 とおく。
- S_0 **上の点に対して平面の点を対応させる変換** L を次のように定める：S_0 の V に対して、V_0 と V を結ぶ直線は、平面と一点で交わる。その交点を $L(V)$ とおく。
- **平面上の点に対して** S_0 **の点を対応させる変換** M を次のように定める：平面上の点 P と V_0 とを結ぶ直線は S_0 と一点で交わる。その交点を $M(P)$ とおく。
- S_0 の点と平面上の点とは、互いの逆の変換 L, M によって、一対一に対応する。
- 平面から平面への変換 K は、次のように S_0 から S_0 への変換に「翻訳」することができる：L, K, M をこの順に行う変換を考える。
- K_+ は、S_0 から S_0 への変換に「翻訳」すると、与えられた平面に関する**面対称**になる。
- K_- は、S_0 から S_0 への変換に「翻訳」すると、原点に関する**点対称**になる。
- 変換 $P \mapsto M(P)$ によって、平面上の直線は、球面上の V_0 を通る円にうつる。
- 変換 $P \mapsto M(P)$ によって、平面上の円は、球面上の V_0 を通らない円にうつる。

演習問題

- S_0 の上の点 $V(s,t,u)$ に対応する平面上の点を $P(x,y)$ とする。ここで $s^2+t^2+u^2=1$ である。$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とすると、次が成立することを示せ。

$$x = \frac{s}{1-u}, \quad y = \frac{t}{1-u}, \quad r^2 = \frac{1+u}{1-u}$$

$$s = \frac{2x}{r^2+1}, \quad t = \frac{2y}{r^2+1}, \quad u = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

[10] 一般には $G(z) = z/r - \alpha$.

- S_0 と空間内の平面 $2s + 3t - u = 1$ との共通部分は円である[11]。この図形を「翻訳」すると、はじめの平面上に図形が定まる。それが再び円であることを示せ。

[11] 一般には平面 $As + Bt + Cu + D = 0$ との共通部分は空集合か、1 点か、円である。