高校生のための現代数学講座　　　　東京大学
「複素数」　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　坪井　俊　　　　2011 年 7 月 30 日

「複素数の商」

1　複素数の積の復習と複素数の逆数

- 複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ の積 zw は
$$zw = (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$$
で与えられていた。

- z と w の積 zw は、w と z の積 wz と等しい。すなわち、$zw = wz$ を満たしている。

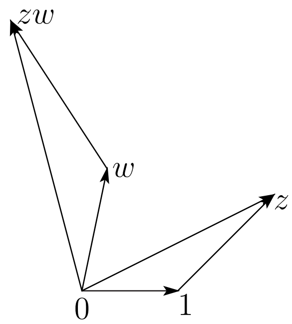
- $z \neq 0$ ならば、$zw = 1$ となる w は次のように計算される。

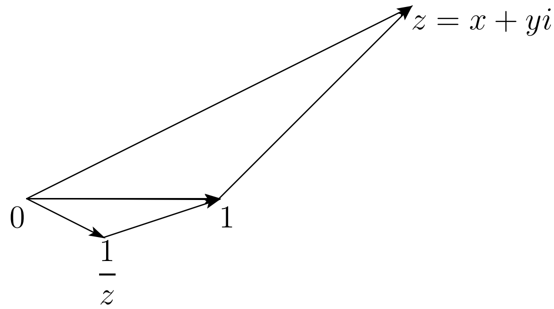
$$z \neq 0 \text{ ならば、} x \neq 0 \text{ または } y \neq 0.$$
$$x \neq 0 \text{ ならば、} v = -\frac{yu}{x} \text{ とおいて、} xu - yv = 1 \text{ に代入すると}$$
$$(x + y\frac{y}{x})u = 1 \text{ を得るから、}$$
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$\text{すなわち、} w = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \text{ を得る。}$$
$$y \neq 0 \text{ ならば、} u = -\frac{xv}{y} \text{ とおいて、} xu - yv = 1 \text{ に代入すると}$$
$$(-x\frac{x}{y} - y)v = 1 \text{ を得るから、}$$
$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2},\ u = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
$$\text{すなわち、この場合も } w = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \text{ を得る。}$$

こうして $\dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$ がわかった。

- 普通は、次のように導いている。
$\overline{z} = x - yi$ を $z = x + yi$ の共役複素数とすると、$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ は実数で 0 ではない。
$z(x - yi) = x^2 + y^2$ だから、$\dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}.$

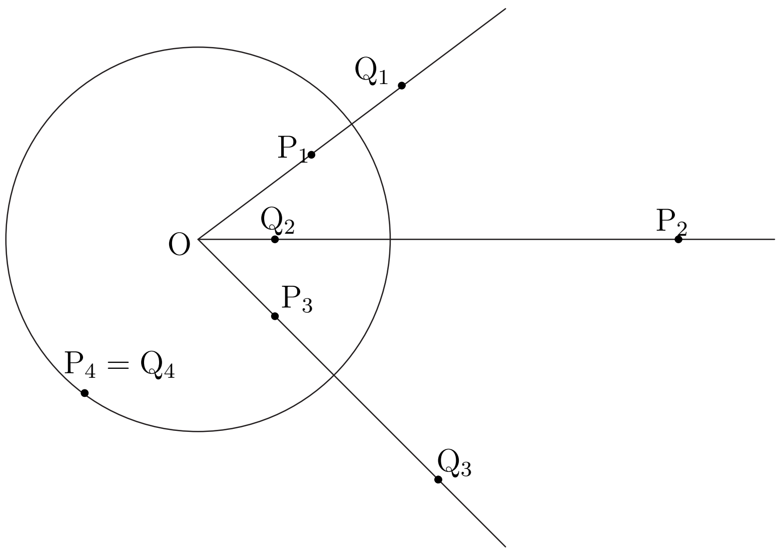
- 複素数平面上で、z を掛けることは、三角形 $0\,1\,z$, 三角形 $0\,w\,(zw)$ が相似になるように線分 $0\,w$ に対し、(zw) を定めることと理解すると、$\dfrac{1}{z}$ は次の性質をみたす点である。
$$\text{三角形 } 0\,1\,z, \text{三角形 } 0\,(\frac{1}{z})\,1 \text{ は相似.}$$





- 複素数 $z = x + yi$ に対し、$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**と呼ぶ。複素数平面上の z と原点の距離、線分 $0\,z$ の長さである。角 $1\,0\,z$ を z の**偏角**と呼ぶ。角度は $y > 0$ のとき $(0, \pi)$ あるいは $(0°, 180°)$ の間の値をとり、$y < 0$ のとき $(-\pi, 0)$ あるいは $(-180°, 0°)$ の間の値をとる（あるいは、一般角である）と考える。

$$\frac{1}{z} \text{ の絶対値は } z \text{ の絶対値の逆数、}$$
$$\frac{1}{z} \text{ の偏角は } z \text{ の偏角の } -1 \text{ 倍となる。}$$



2　円についての反転　1

- 平面上に中心 O, 半径 r の円 C が与えられているとき、O 以外の点 P に対し、半直線 OP 上の点 Q で、$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = r^2$ となるものをとることができる。このように O 以外の点 P に対し、点 Q を定める対応を円 C に関する**反転**と呼ぶ。I_C で円 C に関する反転を表すと、
$$I_C(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$$
である。

- **すぐわかる性質。**

P が円 C の周上にあれば、$I_C(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$

P が円 C の内部にあれば、$I_C(\mathrm{P})$ は円 C の外部にある。

P が円 C の外部にあれば、$I_C(\mathrm{P})$ は円 C の内部にある。
$I_C(I_C(\mathrm{P})) = \mathrm{P}$

- 無限遠点 ∞ を考えて、$I_C(\infty) = \mathrm{O}$, $I_C(\mathrm{O}) = \infty$ と考えると都合が良いことが多い。
- O を中心とする k 倍の相似拡大を M_k とすると、相似拡大して反転すると、反転して割合で相似縮小したものと等しい。

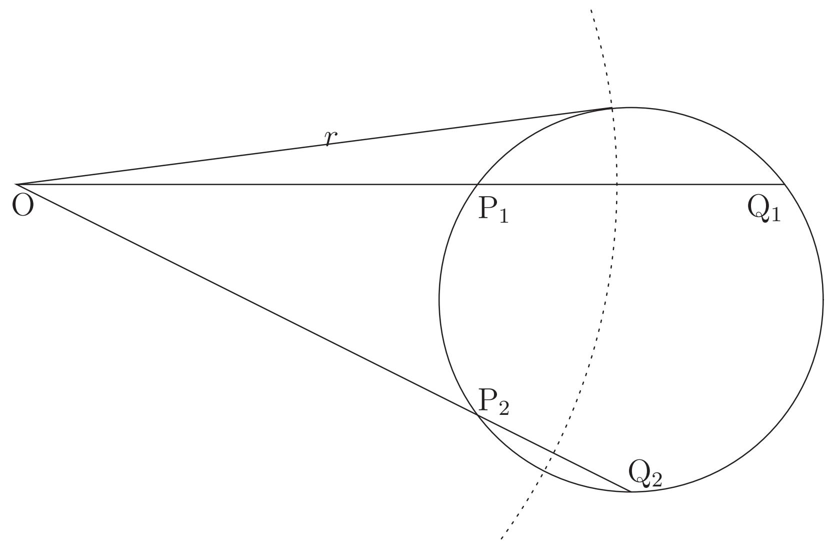
$$I_C \circ M_k = M_{\frac{1}{k}} \circ I_C$$

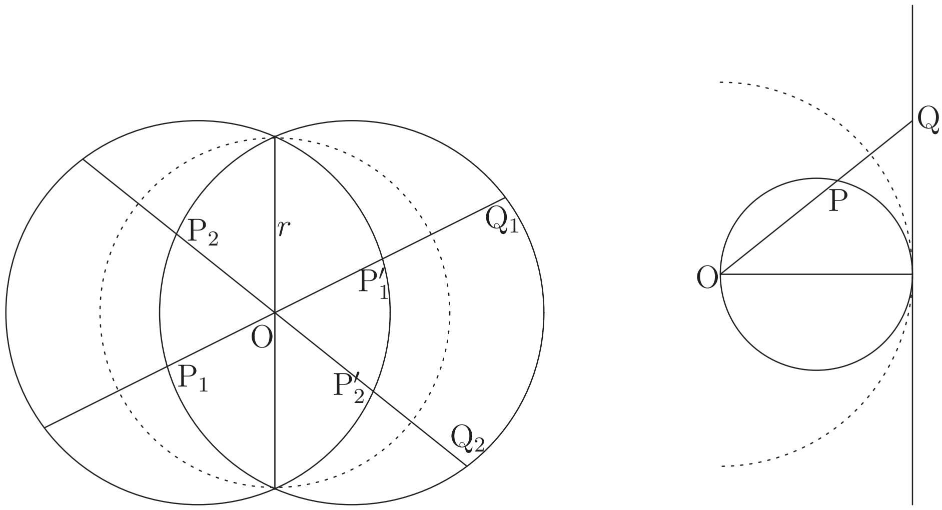
3　円についての反転　2

- **重要な性質**
平面上の円または直線を反転すると円または直線になる。
- このことは、方べきの定理（の逆）により示すことができる。
- **方べきの定理**は、O を通る 2 つの直線と（中心が O とは限らない円 K の交点について、

$$\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$$

が成り立つというものである。
- 方べきの定理は、次のようにして示される。円周角の定理により、三角形 $\mathrm{OP_1Q_2}$, $\mathrm{OP_2Q_1}$ の 2 つの角度が等しいことがわかる。従って、三角形 $\mathrm{OP_1Q_2}$, $\mathrm{OP_2Q_1}$ は相似である。ゆえに $\mathrm{OP}_1 : \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OQ}_2 : \mathrm{OQ}_1$ である。従って、$\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$ が成り立つ。
- 方べきの定理の積は、下の図に示した r^2 に等しい。r は、O が円 K の外部にあるときには円 K への接線の接点への距離であり、r は O が円 K の内部にあるときには O ついて円 K と対称な円 K' を考えて K と K' の交点への距離である。
- **方べきの定理の逆**とは、次の命題である。
O を通る 2 つの直線 ℓ_1, ℓ_2 上に、2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1$, 2 点 $\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2$ を $\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$ を満たすようにとる。ただし、直線上に $\mathrm{OP_1Q_1}$, $\mathrm{OP_2Q_2}$ の順に並んでいるか、あるいは直線上に $\mathrm{P_1OQ_1}$, $\mathrm{P_2OQ_2}$ の順に並んでいるとする。このとき、4 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ は 1 つの円周上にある。





- 上の図は円または直線を図における半径rの円で反転した時に、どのような円または直線に写るかを描いている。

- すなわち、以下のことが成り立つ。
半径rの円Cに直交する円Zは、それ自身に写る。
半径rの円Cの直径の端点を通る円Zは、Oについて対称な円Z'に写る。
半径rの円Cに接する直線と接点と中心を直径とする円は写りあう。
半径rの円Cの中心を通る直線は、それ自身に写る。

- 半径rの円Cに対して上のような位置にない円または直線については、Oを中心とする相似拡大（縮小）をして相似考える。
Oを中心とする半径rの円Cについての反転CとOを中心とする相似拡大M_kの関係から、反転は円または直線を、円または直線に写す。

- さらに、２つの円または直線が交わっているとき、その図形を反転させた２つの円または直線も交わっているが、交わりの角度は等しい。

- このことは、上の図において、Oを通る直線と円あるいは直線のなす角度が等しいことからわかる。この角度はOを中心とする相似拡大（縮小）をしても変わらないことにも注意する。

4　複素数の逆数と反転

- 複素数zを、その逆数$\dfrac{1}{z}$に写す対応は、単位円についての反転と複素共役を続けて行ったものである。

- 従って、この対応は、円または直線を円または直線に写す。また、交わる２つの円または直線のなす角度を保つ。