高校生のための現代数学講座　　　　　　　　東京大学
「複素数」　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　坪井　俊　　　　　　　　2011 年 7 月 23 日

「多項式写像」

1　実数直線上の多項式写像

- 変数 x について、1 次式 $ax+b$, 2 次式 ax^2+bx+c, 3 次式 ax^3+bx^2+cx+d $(a \neq 0)$, より一般には、自然数 n に対し、n 次多項式 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ を考える。

- 実数 x に対し、$ax+b$ を対応させる写像のグラフは直線 $y = ax+b$ になり、ax^2+bx+c を対応させる写像のグラフは放物線 $y = ax^2 + bx + c$ となる。次数が高くなると、グラフの形は複雑になり、簡単に記述することはできない。

- しかし、0 から遠い（$\pm\infty$ に近い）x に対しては、$P(x)$ の符号と a_0x^n の符号は同じになる。実際、

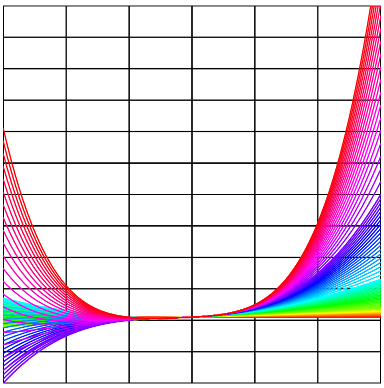
$$\begin{aligned}&a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\\ &= a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right)\end{aligned}$$

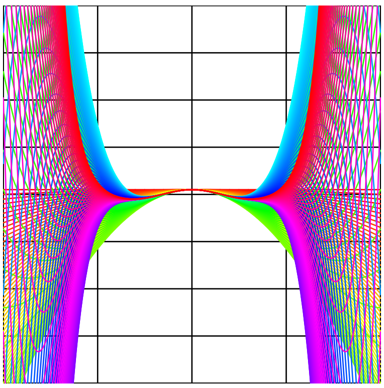
と変形して，$|x| > \dfrac{n|a_1|}{|a_0|}$, $|x|^2 > \dfrac{n|a_2|}{|a_0|}$, $\ldots$, $|x|^{n-1} > \dfrac{n|a_{n-1}|}{|a_0|}$, $|x|^n > \dfrac{n|a_n|}{|a_0|}$ となるように x をとると、上の式の括弧 $\Big(\bullet\Big)$ の値は正であり、$P(x)$ の符号と a_0x^n の符号は同じになる。

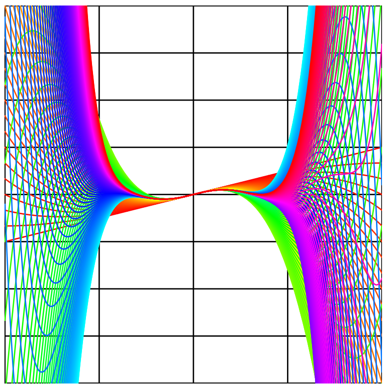
- 実際に、グラフをパソコンで描いてみると次のようになる。

例えば、$1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ について、$y = 1$ のグラフ、$y = 1 + x$ のグラフ、$y = 1 + x + x^2$ のグラフ、$y = 1 + x + x^2 + x^3$ のグラフ、$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ のグラフと順に描いていくと、x の絶対値が大きなところでは、最高次の項が、グラフの形を決定していることが分かる

他の例として、$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$, $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9$ も並べておく。







- この様子を観察すると、（中間値の定理によって）奇数次の多項式のグラフは x 軸と交わる。従って奇数次の代数方程式は解を持つ。

2 複素数平面上の多項式写像

- この考え方は、複素数平面で定義された多項式に適用できる。

  考え方というのは、「n 次多項式 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ のグラフは、単項式 a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, $\ldots$, $a_{n-1}x$, a_n のグラフを重ね合わせたもので、単項式の増大度は、次数の高いものほど大きいから、$|x|$ が大きいとき、$P(x)$ のふるまいは、a_0x^n のふるまいに近くなる」というものである。

- 複素数平面での z に単項式 a_0z^n の値を対応させる写像の様子をみてみよう。複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ の積 $zw = (x + yi)(u + vi)$ について、絶対値は z, w の絶対値の積（$|zw| = |z||w|$）, 偏角は z, w の偏角の和（$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \bmod 2\pi$ $(\mathrm{mod}\, 360°)$）である。

- $z = 0$ ならば、$a_0z^n = 0$ である。

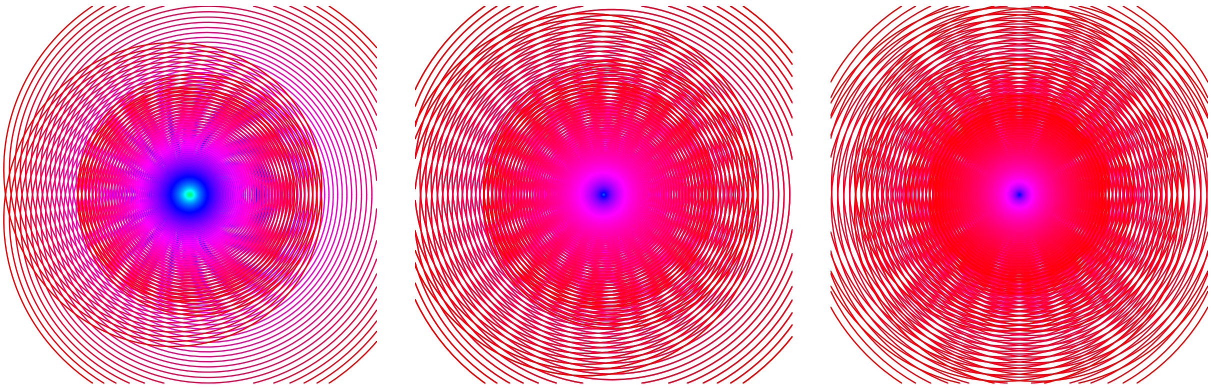
  z の絶対値が 1 ならば、a_0z^n の絶対値は $|a_0|$ である。さらに、絶対値が 1 の複素数は、複素数平面上の単位円周であるが、z が、この単位円周を（1 を基点として正の向きに）1 回まわるとき、a_0z^n は半径 $|a_0|$ の円周上を（a_0 を基点として正の向きに）n 回まわる。

  z の絶対値が r ならば、a_0z^n の絶対値は $|a_0|r^n$ である。さらに、z が、半径 r の円周を（r を基点として正の向きに）1 回まわるとき、a_0z^n は半径 $|a_0|r^n$ の円周上を（a_0r^n を基点として正の向きに）n 回まわる。

- さて、r が十分大きい時を考える。例えば、$r > \dfrac{9n|a_1|}{|a_0|}$, $r^2 > \dfrac{9n|a_2|}{|a_0|}$, $\ldots$, $r^{n-1} > \dfrac{9n|a_{n-1}|}{|a_0|}$, $r^n > \dfrac{9n|a_n|}{|a_0|}$ にとると、$|P(z) - a_0z^n| < \dfrac{|a_0|}{9}|z^n|$ となるが、これは、$P(z)$ の位置は半径 $|a_0|r^n$ の円周上の a_0z^n の位置に大局的にみれば近いことを示している。

- 例えば、$P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ について、半径 r の円周の像を r を 0 から増大させて描くと様子が分かる。

  他の例として、$P(z) = 1 - \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{4!}z^4 - \dfrac{1}{6!}z^6 + \dfrac{1}{8!}z^8$, $P(z) = z - \dfrac{1}{3!}z^3 + \dfrac{1}{5!}z^5 - \dfrac{1}{7!}z^7 + \dfrac{1}{9!}z^9$ も並べておく。



3 代数学の基本定理

- 多項式写像の様子は、代数学の基本定理の証明の方法を示唆している。

- 代数学の基本定理とは、「n 次代数方程式 $P(z)=0$ は、複素数の範囲で解を持つ」というものである。

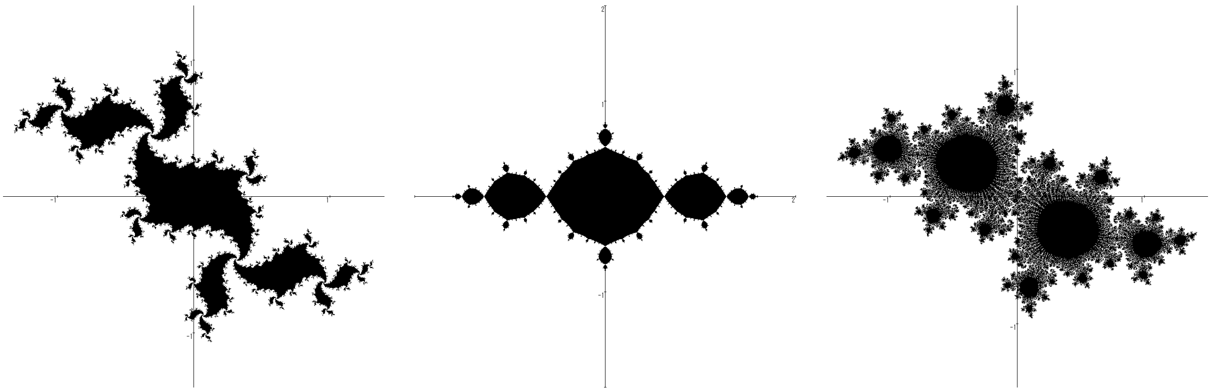
- すなわち、複素数平面上の半径 r の円板を考え、z がその円板上を動けば、$P(z)$ は z に依存して連続に動く。r が非常に大きいとき、z が半径 r の円板の境界の円周上を１回りすると、$P(z)$ は半径 $|a_0|r^n$ の円周の近くを n 回まわる。境界がそのように写るように円板を連続的に写そうとすると、どうしても 0 にかぶさるようにうつる。したがって、$P(z)=0$ となる点 z が存在することになる。

4 ジュリア集合

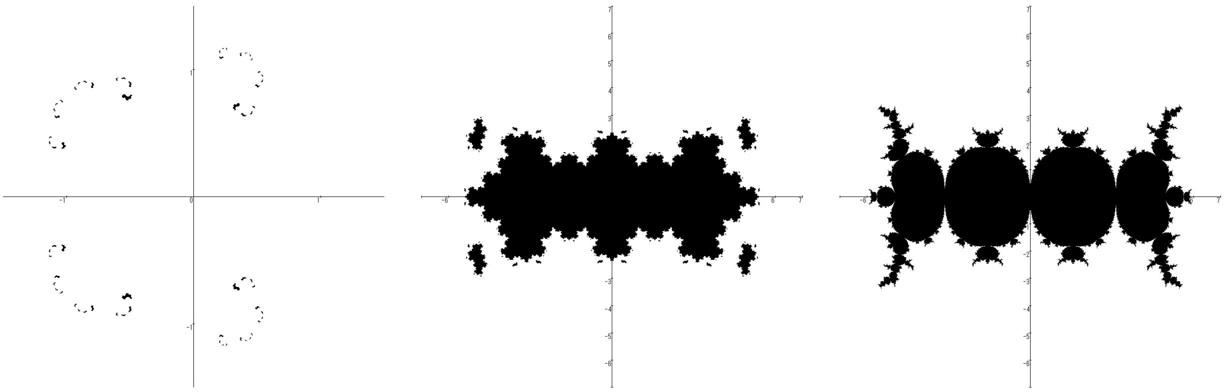
- ２次より高い次数の多項式写像の様子をみるとき、z が $P(z)$ に写されるとして、それには固定点があることが、代数学の基本定理からわかる。実際、方程式 $P(z)-z=0$ の解が固定点である。固定点は $P(P(z))=P(z)=z$ を満たす。したがって、多項式写像で何度写しても、固定点 z は、その場にとどまる。一方、上で行った計算から、絶対値 r が大きな z に対して、$P(z)$ の絶対値は $\frac{8}{9}|a_0|r^n$ より大きいから、r が大きければ z の絶対値の倍以上となり、$z, P(z), P(P(z)), \ldots$ という列は、絶対値が無限大となるように発散する。

- そうすると目に見える範囲にとどまる z の集合はどのようなものになるかを考える事ができる。集合の記号で書くと $J=\{z\ \big|\exists b, |P^n(z)|<b\}$ を考えるのである。J は多項式写像 P の充填ジュリア集合と呼ばれる。この充填ジュリア集合 J の形は、$P(z)$ が２次多項式 $P(z)=z^2+c$ に対しても、おもしろい形をしている。

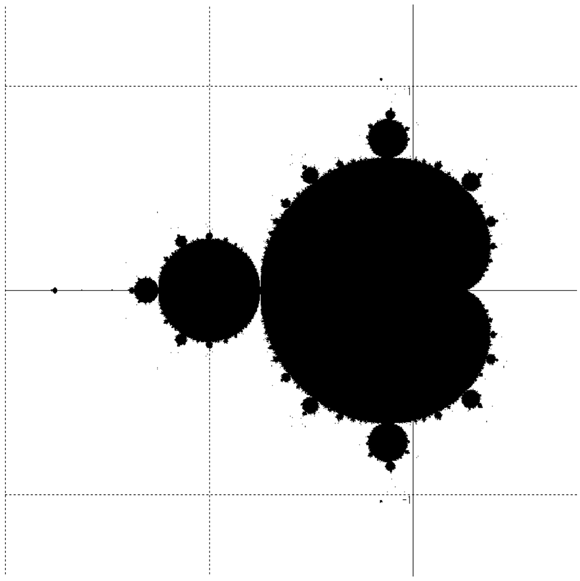
  $z^2-0.2+0.75i,\ z^2-1,\ z^2-0.5102+0.5102i$ に対する充填ジュリア集合 J は、以下のようになる。



- $P(z)=1+z+z^2+z^3+z^4,\ P(z)=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\frac{1}{8!}z^8,\ P(z)=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\frac{1}{9!}z^9$ の充填ジュリア集合は次のようになる。



- ２次多項式 $P(z) = z^2 + c$ の充填ジュリア集合が、連結な図形であるような c の全体のなす集合をマンデルブロー集合と呼ぶ。マンデルブロー集合については、この２５年間に深く研究されてきたが、まだ未知のことも多い。



- ウェブページ

  http://aleph0.clarku.edu/〜djoyce/julia/

  にあるＪＡＶＡプログラムによって、マンデルブロー集合の点 c に対応する充填ジュリア集合の形をみることができる。

- これは Dimensions というビデオにも取り上げられている。

  http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~dim_jp/
  http://www.dimensions-math.org/

5 多項式写像の性質

- 実数の範囲での多項式写像 $P(x)$ の様子は、グラフ $y = P(x)$ を $y = x$ のグラフと比べることでかなりよくわかる。

- ２つの多項式写像 $P(x),\ Q(x)$ が、写像として同じ性質を持つことは、実数からそれ自身への全単射連続写像 $f(x)$ で逆写像 f^{-1} も連続なものがあって、$Q(x) = f^{-1}(P(f(x)))$ となることであると考えられる。

- 複素数 z を $P(z)$ に写す多項式写像についても同様に考えることができる。

- 写像として同じ性質を持っているならば、ジュリア集合の形は、“同じ” である。