高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「複素数」　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　関口英子　　　　　　　　　　　　　　　　　2011 年 7 月 23 日

「複素数平面と複素数の積」

1　複素数平面

講義 (1) の内容の復習： 複素数 α は実数 a と b を用いて $a+bi$ と表すことができる.

そこで，複素数 $\alpha = a+bi$ に対して平面上の点 (a,b) を対応させてみよう.

この対応によって，

∘ 平面上のどの点 (a,b) に対しても $a+bi$ という複素数を対応させることができる.
∘ 相異なる複素数は平面上の相異なる点に対応する.

問 (2)-1. 以下に挙げる複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を複素数平面の点として表してみましょう.

$$(1)\ \ \alpha_1 = 1+2i \qquad (2)\ \ \alpha_2 = 3-\sqrt{5}i \qquad (3)\ \ \alpha_3 = 3i$$

新しい言葉と記号. 複素数 z を実数 x と y を用いて $z = x+yi$ と表したとき，

x を z の実部 (実数部分，real part),
y を z の虚部 (虚数部分，imaginary part)

と呼び，

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z$$

という記号を用いて表す.

問 (2)-2. 問題 (2)-1 の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の実部と虚部を求めてみましょう.

2　複素数の極座標表示

準備 1：弧度法

角の大きさを表す方法 $\cdots$ 度数法，弧度法

O を中心として半径 1 の円を考える．$\angle XOY$ が切り取る円弧の長さが 1 のとき $\angle XOY$ の大きさを 1 ラジアンといい，これを単位として角の大きさを測る方法を弧度法という．

全角の大きさ $= 2\pi$ ラジアン

平角の大きさ $= \pi$ ラジアン

直角の大きさ $= \dfrac{\pi}{2}$ ラジアン

$\angle XOY$ の大きさ $= a^\circ = \theta$ ラジアンのとき，

$$\frac{a}{360} = \frac{\theta}{2\pi}$$

なので，

$$\theta = \frac{\pi}{180}a, \qquad a = \frac{180}{\pi}\theta$$

が成り立つ．

問題 (2)-3. 度数法を用いて表された以下の角度を弧度法を用いて表してみましょう．

$$(1)\ 30^\circ \qquad (2)\ 45^\circ \qquad (3)\ 60^\circ$$

準備 2：三角関数

$$\cos\theta \cdots \text{余弦関数}, \qquad \sin\theta \cdots \text{正弦関数}$$

三角関数の性質

(1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(2) $-1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1$

(3) $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$ 　(n は整数)

(4) $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

(5) $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \quad \sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$

準備 3：極座標

0 でない複素数を任意に選び，それを z とする．z の実部，虚部をそれぞれ x, y とおく．

> z は正の数 $|z|$ と実数 θ とを用いて
> $$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
> という形で表すことができる．
> ここで，
> $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 　$\cdots$ 　z の絶対値
> θ は 点 (x, y) と原点を結んだ線分と x 軸の正の方向とのなす角 　$\cdots$ 　z の偏角

証明のスケッチ

複素数 $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{x + yi}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ に注目しよう．

- 複素数平面上で考えると複素数 $\dfrac{z}{|z|}$ は原点からの距離が 1 の点である．
- 準備 2 より $\dfrac{z}{|z|}$ の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ の形で表すことができる．複素数平面上のこの点を複素数として考えると
$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$
である．

3　複素数の積

複素数 z_1, z_2 を極座標によって表したとき，積 $z_1 z_2$ はどのように表されるだろうか.

複素数 z_1, z_2 を極座標によって以下のように表したとき，

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

積 $z_1 z_2$ は次の形で与えられる.

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

すなわち，

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

が成り立つ.

証明のスケッチ

- 講義 (1) の複素数の乗法 $(x+yi)\cdot(u+vi) = (xu-yv)+(xv+yu)i$
- 準備 2　三角関数の性質，加法公式