再改訂版
2011/07/23

2011年度　高校生のための現代数学講座

「複素数」

# 第1話『複素数の発見』

東京大学 大学院 数理科学研究科
金井雅彦
2011/07/23



## ■ ２次方程式の解法 (1)

例　$x^2-3x+2=0$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x=1,2$$

一般に２次方程式

$$x^2+{\color{red}b}x+{\color{red}c}=0 \qquad (1)$$

が $p$, $q$ を解に持つならば，
(1) の左辺は

$$(x-p)(x-q)=0 \qquad (2)$$

の形に因数分解可能．

逆に (2) の左辺を展開すると，

$$x^2-(p+q)x+pq=0$$

これと (1) の左辺とを比較することにより，以下を得る：

$$p+q=-{\color{red}b}$$
$$pq={\color{red}c}$$

**解と係数の関係**



## ■ ２次方程式の解法 (2)

例　$x^2-2x-2=0$

$$(x-1)^2-3=0$$
$$(x-1)^2=3$$
$$x-1=\pm\sqrt{3}$$
$$x=1\pm\sqrt{3}$$

一般に２次方程式

$$x^2+bx+c=0$$

に対し，

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}$$

$D=b^2-4c\geq 0$ の仮定のもと，

$$x+\frac{b}{2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

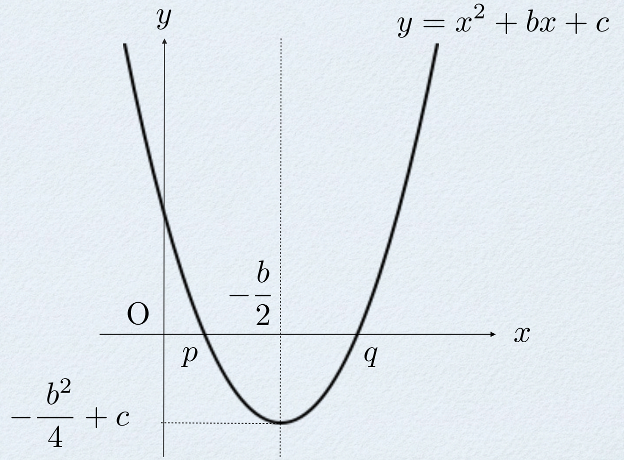
**解の公式**



$$x^2+bx+c=0$$

$D=b^2-4c\geq 0$ の仮定のもと

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$



## ■ 数列とは. . .

単に数を並べあげたもの

例　$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots$

$1,\ -5,\ 3,\ -2,\ 2,\ \cdots\cdots$

$n=1,2,\cdots$ としたとき，
数列の $n$ 番目の項を $a_n$ で表す.
また，数列自体は $\{a_n\}$ で表す.

**数列の表示の仕方**

1) 項を順番に並べあげる

2) $a_n$ を $n$ の式で表す

例
$$a_n = 2n-1$$
$$a_n = 2^n$$

3) **漸化式**を用いる

例
$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 2a_n \quad (n=1,2,\cdots)$$



## ■ フィボナッチ数列

$$a_1 = a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (*)$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\cdots\cdots$$

**問題.** 数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ（すなわち，$a_n$ を $n$ の式で表せ）.

(*) において
$$a_n \to 1$$
$$a_{n+1} \to x$$
$$a_{n+2} \to x^2$$
とおきかえることにより

2次方程式 $x^2 = x+1$ ,すなわち
$$x^2 - x - 1 = 0$$
を得る．これを解くと
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

解の公式　$x^2+bx+c=0$　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$

このふたつの解を $p, q$ とすると，
解と係数の関係より，
$$p+q=1,\quad pq=-1.$$

解と係数の関係　$x^2+bx+c=0$　$p+q=-b,\quad pq=c.$



$$a_1 = a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (*)$$

$$p, q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad p+q=1,\quad pq=-1.$$

(*) は以下のよう変形可能
$$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$$

逆にこの式の右辺を展開，さらに左辺の第２項を移項すると
$$a_{n+2} = (p+q)a_{n+1} - pqa_n$$

(*) はまた以下のようにも変形可能
$$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$$

$$b_n = a_{n+1} - pa_n$$
とおけば，
$$b_{n+1} = qb_n \quad (n=1,2,\cdots)$$
$$b_n = b_1 q^{n-1}$$
ところが，
$$b_1 = a_2 - pa_1 = 1-p = q$$
ゆえに
$$b_n = q^n$$
同様に，
$$c_n = a_{n+1} - qa_n$$
とおけば，
$$c_{n+1} = pc_n \quad (n=1,2,\cdots)$$
$$c_n = c_1 p^{n-1} = p^n$$



$$b_n = a_{n+1} - pa_n,\quad b_n = q^n,\quad c_n = a_{n+1} - qa_n,\quad c_n = p^n$$

$$a_{n+1} - pa_n = q^n$$
$$a_{n+1} - qa_n = p^n$$

両辺の差をとれば，
$$(q-p)a_n = q^n - p^n$$
$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

**類題.** $a_1 = a_2 = 1$ および，

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_n \to 1$$
$$a_{n+1} \to x$$
$$a_{n+2} \to x^2$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$D = -3 < 0$$

**困った !!**

もう一度，フィボナッチ数列を見直そう．．．

$$a_1 = a_2 = 1,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は無理数.

でも，そもそもフィボナッチ数列の各項は自然数だった．．．



## ■ 数概念の拡張

**自然数**

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

**整数**

$$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots\cdots$$

**有理数**

$\dfrac{p}{q}$ （ただし，$p, q$ は整数，$q > 0$ ）

**実数**

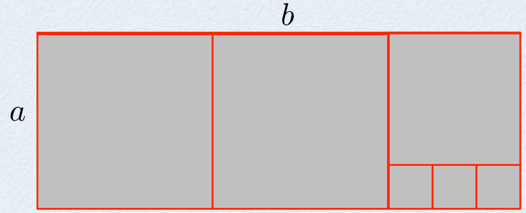
有理数でない実数は**無理数**と呼ばれる



## ■ 無理数

**目的.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は無理数であることを証明する.

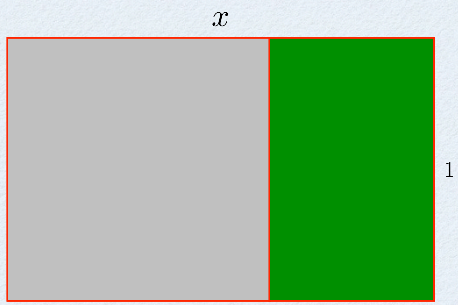
**ユークリッドの互除法**




**有理性の判定法.** この操作が有限回で終わるための必要十分条件は，$a/b$ が有理数であることである.



**問題.** 図のような長方形がある. ただし，底辺の長さを $x$，高さを 1 とする. この長方形から，1辺の長さが 1 の正方形をひとつ取り除く. その結果得られる小さな長方形が，もとの長方形に相似であるという. もとの長方形の底辺の長さ $x$ を求めよ.




$$1 : x = (x-1) : 1$$

すなわち，

$$x(x-1) = 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

これを解くと，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ でなければならないから，

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**結論.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は無理数である.

## ■ 複素数

**決断.** $\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ を「数」として受け入れよう！

・自乗したら $-1$ になる数

$$i=\sqrt{-1}$$

を導入する.

・$x+iy$（ただし，$x, y$ は実数）を**複素数**と呼ぶ.

**例** $\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

**注意.** 実数も複素数である.

・実数でない複素数を**虚数**と呼ぶ.

**・加法**

**例** $(1+3i)+(-2+5i)$

$=(1-2)+(3+5)i$

$=-1+8i$

一般に,

$$(x+yi)+(u+vi)$$
$$=(x+u)+(y+v)i$$



**・乗法**

**例** $(1+3i)\cdot(-2+5i)$

$=1\cdot(-2)+\{1\cdot 5$

$\quad +3\cdot(-2)\}i+3\cdot 5i^2$

$=\ -2-i-15$ $\quad i^2=-1$

$=\ -17-i$

一般に,

$$(x+yi)\cdot(u+vi)$$
$$=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

**例** $(2+3i)(2-3i)$

$=4+9$

$=13$

**宿題.** 複素数の減法・除法について考えてみよう.

**類題.** $a_1=a_2=1$ および,

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{-3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n\right\}$$



## ■ まとめと展望

・**複素数** $x+yi$

$$i^2=-1$$

・複素数を認めれば，2次方程式は必ず解を持つ.

・3次方程式

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \quad (*)$$

は必ず $b=0$ の形に変形可能であることが知られている.

・$b=0$ のとき，3次方程式 (*) の解は**カルダノの公式**で求められる.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}}$$

したがって，３次方程式も必ず解を持つ.

**余談.** ３次方程式

$$x^3-6x-4=0$$

は，３つの実解を持つ．それにも関わらず，カルダノの公式には虚数が現れる.

・４次方程式でも事情は同じ.



・５次以上の代数方程式も複素数解を必ず有する.

— **代数学の基本定理**

・「複素関数」を考える.

例. $e^x \quad \sin x \quad \cos x$

すると，複素数が隠し持つ力をさらに実感できる.

例. $e^{i\pi}=-1$

— **複素関数論**

・**量子力学**などの物理学でも極めて重要な役割を果たすようになる.