高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「確率の考え方」　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　桂　利行　　　　　　　　　　　　　　　　2010 年 7 月 31 日

「条件付き確率とは」

1　相対頻度と確率

相対頻度や確率を考える事柄を**事象**という。事象全体の集合 U の部分集合 A は、A の要素の事象が起こるという事象をあらわしている。

例えば、１個のさいころを振る場合、「１の目が出る」、⋯、「６の目が出る」という６個の事象からなる集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を考えている。この集合の要素 1, 2, 3, 4, 5, 6 が１つずつの事象を表している。部分集合 $\{1, 3, 5\}$ は、奇数の目が出るという事象を表している。要素 1, 2, 3, 4, 5, 6 に、その要素だけからなる部分集合 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ を対応させることができる。これにより、１つの要素があらわす事象と、１つの要素だけを要素とする部分集合があらわす事象と同じと考える。

実際にさいころを振って、事象を作り出すことを**試行**という。

試行を繰り返して事象の**相対頻度**（さいころを振る場合は、$A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対して、$\dfrac{A\text{に属する目が出る回数}}{\text{さいころを振る回数}}$）が、試行の回数を増やしていくとある値 $P(A)$ に近づくというのが、**ベルヌーイの大数の法則**である。この値を事象 A の**確率**と呼ぶ。

さて、考えている事象の集合を U とすると、相対頻度は 1 であるから、$P(U) = 1$ である。U の部分集合である事象 A に対し、$0 \leqq P(A) \leqq 1$ である。A とその補集合 $\overline{A} = U - A$ に対して、$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ である。特に、空集合 $\emptyset$ に対して、$P(\emptyset) = 0$ である。

2　前回の実験演習

７月２４日に実験演習としておこなったさいころを１０００回振る試行の結果の表を見てみよう。これは、 $K = \{1, 3, 5\}$, $A_1 = \{1\}$ に対して、$P(K)$, $P(A_1)$ を求める実験であった。

実験では、相対頻度 $\dfrac{K\text{の頻度}}{\text{さいころを振った回数}}$, $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{\text{さいころを振った回数}}$ は、いくつになっただろうか。全員の結果を合わせるとどうなっただろうか。

- 自分の実験で 100 回の試行による奇数の目が出る相対頻度は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にあった。

  教室の中での 1000 回の試行による奇数の目が出る相対頻度は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にあった。

- 自分の実験で 100 回の試行による１の目が出る相対頻度は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にあった。

  教室の中での 1000 回の試行による１の目が出る相対頻度は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にあった。

この実験の結果から、ほぼ $P(A_1)=\dfrac{1}{6}$, $P(K)=\dfrac{1}{2}$ であると予想された。

ここで、次のことを考える。さいころを振って、１の目が出る確率は、$\dfrac{1}{6}$ であるが、目隠しをしてさいころを振って、出た目が奇数か偶数かという情報が先にもらえるとする。このときに、目隠しをとって１の目が出ている確率は何になるだろうか。

答は、奇数という情報が得られれば、確率は $\dfrac{1}{3}$, 偶数という情報が得られれば、確率は 0 である。

実験の表では、相対頻度 $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{K\text{の頻度}}$ は、いくつになっているだろうか。

- 自分の実験で 100 回の試行による $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{K\text{の頻度}}$ は、小数で書くと
  $\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$
- 自分の実験で 100 回の試行による $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{K\text{の頻度}}$ は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にある。
- 自分の実験で 1000 回の試行による $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{K\text{の頻度}}$ は、$\boxed{}$ である。
- 教室の中での 1000 回の試行による $\dfrac{A_1\text{の頻度}}{K\text{の頻度}}$ は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の間にある。

3　２つのさいころ（その１）

２つのさいころを順に振って、１の目が続けて出る確率を考える。事象の集合は、１回目に出る目と、２回目に出る目を並べて書くと、

$$\begin{aligned}\{&11,12,13,14,15,16,\\ &21,22,23,24,25,26,\\ &31,32,33,34,35,36,\\ &41,42,43,44,45,46,\\ &51,52,53,54,55,56,\\ &61,62,63,64,65,66\}\end{aligned}$$

の 36 個の要素からなる。

これらの 36 個の事象は同様に確からしい。従って、１の目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{36}$ である。

このとき、まず１回目に１の目が出るかどうかで場合が分かれる。すなわち、１回目に１の目が出たときに、２回目にも１の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である。１回目に１の目が出なかったとき、２回続けて１の目が出る確率は、0 である。

4　条件付き確率

　A, B は事象で $P(A) > 0$ とする。事象 A が起こったということを知っているという条件の下での事象 B の確率（条件付き確率） $P(B|A)$ は

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で与えられる。
　何故こう考えるべきなのであろうか。
　今、事象の集合 U は、有限個の要素を持つとし、どの事象も同様に確からしいとする。U を全事象とすると、事象 A の確率は

$$P(A) = \frac{A \text{ に含まれる要素の個数}}{U \text{ に含まれる要素の個数}}$$

であった。さて、実際に起きたことが事象 A にあることを知っている時、その条件の下での確率（条件付き確率）がどうなるかを考えてみる。事象 B の条件付き確率を $Q(B)$ と表すことにすると

$$Q(A) = 1$$

でなくてはならない。また、事象 A に含まれる可能性は、元々の確率が同じだったので、条件付き確率も同じであろう。事象 B は A との共通部分 $A \cap B$ に含まれるものだけが起こりうる可能性がある。従って、

$$\begin{aligned} Q(B) &= \frac{A \cap B \text{ に含まれる要素の個数}}{A \text{ に含まれる要素の個数}} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{aligned}$$

となる。

5　２つのさいころ（その２）

　２つのさいころを順に振って、１回目に１の目が出る確率は、
事象 $B_1 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ の確率であるから、

$$P(B_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。また、１回目の目は何でも良いとして、２回目に１の目が出る確率は、
事象 $B_2 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61\}$ の確率であるから、

$$P(B_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。この２つの事象の共通部分 $B_1 \cap B_2 = \{11\}$ が、１の目が続けて出る確率で、それは $\frac{1}{36}$ であるが、

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2)$$

を満たしている。これは、１回目の事象 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$、２回目の事象 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を考えるとき、それらは何も関連していないことを表している。

このように $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2)$ が成立するとき、事象 B_1, B_2 は**独立**であるという。

１回目に事象 B_1 が起きたとき、２回目に B_2 が起きる条件付き確率 $P(B_2|B_1)$ を考えると、

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

となる。

事象 B_1, B_2 が独立であるとは、$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2)$ が成立することであると定めたが、このとき、

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} == \frac{P(B_1) \times P(B_2)}{P(B_1)} = P(B_2)$$

となっている。このことは、１回目に１の目が出る事象 B_1 と２回目に１の目が出る事象 B_2 には、関連がないことを示している。