高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「確率の考え方」　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　楠岡成雄　　　　　　　　　　　　　　　　　2010 年 7 月 24 日

「確率とは何か」

1　序

確率を考える際、最も重要な定理は「大数の法則」である。

何種類かの現象が繰り返し起こるとき、その現象を観測すると、それぞれの現象の起こり方には法則性がみられないが、大量のデータを取るとほとんど一定の割合でおこるというものがあることが経験的に知られている。

例えば、さいころを振ると出る目は、１〜６である。それを何度も振るとき、毎回の出る目には法則性はないと思われる。さいころを１００回、１０００回、１００００回、…と振って、出た目を記録し、１の目、２の目、３の目、４の目、５の目、６の目が、１００回のうち何回出たか、１０００回のうち何回出たか、１００００回のうち何回出たか、…を数えてみる。正確にできたさいころならば、どの目も６分の１の割合で出ることが期待される。

これは、経験的な法則である。こういう現象については、演習の時間に実際にさいころを振って確かめてもらうことにしよう。

2　グラントの「観察」

現在の日本の人口は、総務省統計局によれば2009 年 1 月 1 日には、127,647,584 人、2010 年 1 月 1 日には、127,480,202 人とされている。2009 年の１年間に、167,382 人減少しているが、1,082,270 人生まれ、1,147,836 人亡くなり、3,304,734 人入国し、3,406,550 人出国した結果である。このような統計が、国勢調査、出生届、死亡届、出入国管理局などのデータから、どのように作成されているのかは、興味深い問題であるがここでは扱わない。

歴史的には、イギリスのグラント (1620–1674) という人が、ロンドン市とその周辺の教会の埋葬と洗礼の記録を調べたことに始まっている。埋葬と洗礼の記録が行なわれるようになったのは、1600 年前後で疫病（ペスト）の流行の影響を調べるためであったらしい。グラントは著書「観察」のなかで、

- 男女出生数が、男１４、女１３の割合であること
- 死亡秩序（これを「死亡生存表」（資料参照）にまとめている)
- 人口の移動状況が数値であらわされること

等を見いだしている。

3　大数の法則

ベルヌーイ（ヤコブ）(1654–1705) は、大数の法則をはっきりと述べ、数学として確率と相対頻度の関係を明らかにした。

さいころ１個を振る場合、

$$A_1 = 1\text{の目が出ること、}A_2 = 2\text{の目が出ること、}A_3 = 3\text{の目が出ること、}$$
$$A_4 = 4\text{の目が出ること、}A_5 = 5\text{の目が出ること、}A_6 = 6\text{の目が出ること}$$

の、６個の事柄を**事象**という。さいころを振って、この６個の事象の１つを定めることを**試行**という。１００回、１０００回、１００００回、…の試行を行なうとは、さいころを、１００回、１０００回、１００００回、…振ることである。

さいころ１個を何回も振る時、１の目の出る**相対頻度**とは

$$\frac{1\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$$

のことである。

この相対頻度が、１の目の出る**確率**という数値に近づくというのが、大数の法則である。この確率を $P(A_1)$ のように書く。

同じように、(どのようなさいころでも、) ２の目の出る相対頻度 $\frac{2\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$, ３の目の出る相対頻度 $\frac{3\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$, ４の目の出る相対頻度 $\frac{4\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$, ５の目の出る相対頻度 $\frac{5\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$, ６の目の出る相対頻度 $\frac{6\text{の目の出た回数}}{\text{さいころを振った回数}}$ も、ある数値 $P(A_2), P(A_3), P(A_4), P(A_5), P(A_6)$ に近づくと考えられる。

このとき、どれかの目は必ず出ているから、相対頻度の和は常に１であり、

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$$

である。

均一なもので作られた正確な立方体のさいころの場合、$P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(A_4), P(A_5), P(A_6)$ の値は等しく、$\dfrac{1}{6}$ であると考えられる。このとき、これら６つの事象は、**同様に確からしい**といわれる。

4　問題１について

３個のサイコロを振ると 9 の目と 10 の目のでる組合せはともに

$$\begin{array}{rl} 9: & (1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3) \\ 10: & (1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4) \end{array}$$

の６通りである。それなのに、9 の目より 10 の目のほうがよく出るのはなぜかという問題であった。

確率を考えるときには、事象を同様に確からしい事象に分割して考える必要がある。3 個のさいころを同時に振るという問題であるが、１つずつ順番に振ること、あるいは3つの大きさあるいは色の異なるさいころを使って同時に3個のさいころを振っても、同じ確率で起こると考えられる。従って、出た目の組合せの数ではなく、順序を考えた出た目の順列の数を数えるのがよい。

和が9となるものを考える。組合せ $(1,2,6)$ に対応する順列は

$$(1,2,6),(1,6,2),(2,1,6),(2,6,1),(6,1,2),(6,2,1)$$

の6通りである。同様に、$(1,3,5),(2,3,4)$ も6通りであるが $(1,4,4),(2,2,5)$ は3通りであり、$(3,3,3)$ は1通りしかない。従って、和が9となる順列は全部で 25 通りある。一方、和が１０となるものを考えると、$(1,3,6),(1,4,5),(2,3,5)$ は6通り、$(2,2,6),(2,4,4),(3,3,4)$ は3通りで、全部で２７通りである。

３つのさいころの出た目のすべての順列は

$$6 \times 6 \times 6 = 216\text{通り}$$

であるので、その比は和が9となるのが $\dfrac{25}{216}$, 和が１０となるのが $\dfrac{27}{216}$ となる。

前に述べた、3個のさいころを同時に振ることを、１つずつ順番に振ること、あるいは3つの大きさあるいは色の異なるさいころを使って同時に3個のさいころを振ることと考えると、正確にできたさいころでは、これらの 216 通りの事象は、同様に確からしい。

正確にできたさいころで実験してみると、相対頻度がこれに近づいていくことがわかる。これらの経験より、和が9となる確率は $\dfrac{25}{216}$ 和が１０となる確率は $\dfrac{27}{216}$ であり、このさいころ実験を続けていくと１０が出る頻度は9の出る頻度よりも多く、その相対頻度の差は $\dfrac{2}{216}$ に近づくと考えられる。