

「一次分数変換の応用」

図形（幾何学）の研究に応用しよう。

1 定規とコンパス

代数演算を定規とコンパスで実行する。

- 直線とその上にない点を任意に与え、その点を通りその直線に平行な直線にかく。
- 加法、減法を行う。つまり任意に与えられた二つの複素数 z, w に対し $z + w, z - w$ を求める。
- 乗法を行う。任意に与えられた二つの複素数 z, w に対し zw を求める。
- 割り算を行う。任意に与えられた二つの複素数 z, w で $z \neq 0$ とするとき、 $\frac{w}{z}$ を求める。乗法ができていたので、逆数 $\frac{1}{z}$ を求める。
- 鏡像点を求める。中心 a 、半径 R の円 C と任意の点 z が与えられたとき、

$$(z - a)\overline{(z^* - a)} = R^2 \quad (1)$$

を満たす点 z^* が唯一あり、これを求める。直線（半径無限大の円）に対しては、 z^* は、その直線に関する z の鏡像点とする。

アポロニウスの円 一般にアポロニウスの円とは、二つの相異なる複素数 p, q と正定数 k に対し

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k \quad (2)$$

で与えられる円のことである。実際、計算によりこの方程式は、

$$\left| z - \frac{p - k^2 q}{1 - k^2} \right| = \frac{k|p - q|}{|1 - k^2|}$$

となる。ただし、 $k = 1$ の時は、 p, q を結ぶ線分に直交し、中点を通る直線になる。（演習問題）

(2) で与えられる円を C とする。すると、 p, q は互いに C に関する鏡像点である。実際、 $a = \frac{p - k^2 q}{1 - k^2}$ 、 $R = \frac{k|p - q|}{|1 - k^2|}$ として計算すると、

$$(p - a)\overline{(q - a)} = \cdots = R^2.$$

2 一次分数変換と合成

一次分数変換とは、 a, b, c, d を与えられた複素数として

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3)$$

で与えられる複素平面 $\mathbf{C}$ の変換である。ただし、 $ad - bc \neq 0$ とする。

一次分数変換 (3) では、分母がゼロになる場合が起こる。これに対応するために、無限遠点 ∞ を次の法則で加える。

$$\infty \pm (\text{数}) = \infty, \quad \infty \times (\text{ゼロでない数}) = \infty$$

$$\frac{(\text{ゼロでない数})}{\infty} = 0, \quad \frac{(\text{ゼロでない数})}{0} = \infty$$

定義 (1) $\hat{\mathbf{C}}$ で複素平面 $\mathbf{C}$ に無限遠点を加えたものとする。これをリーマン球面と呼ぶ。
(2) $\hat{\mathbf{C}}$ での“円”とは、 $\mathbf{C}$ 内の通常の円または、直線に ∞ を加えたものとする。(直線は、無限遠点を通る“円”とみる。)

一次変換 (3) は、 $\hat{\mathbf{C}}$ の変換を起こす。

註 鏡像を定める式 (1) で、 $z = a$ (円の中心) に対しては、 $z^* = \infty$ と定める。

例 4 (イ) $w = f(z) = z + 1$ 。平行移動で、 $f(\infty) = \infty$ である。 $\hat{\mathbf{C}}$ の円は、 $\hat{\mathbf{C}}$ の円に写される。

(ロ) $w = g(z) = \frac{z+1}{z+2}$ 。 $g(-2) = \infty$ 。 $g(z) = \frac{1+\frac{1}{z}}{1+\frac{2}{z}}$ であるから、 $g(\infty) = \frac{1}{2}$ 。この場合は、 $\hat{\mathbf{C}}$ の円が、円に写されることは直ぐには見えてこない。

さて上述の例 (ロ) のようなことを調べるときに、一次分数変換をいくつかの単純なものの組み合わせに分解すると調べやすくなる。

合成 一次分数変換が次のように二つ与えられたとする。

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

$\hat{\mathbf{C}}$ をまず $w = f(z)$ で変換し、その後で $g(w)$ と変換することを、変換 f と g の合成と呼び、 $g \circ f(z) = g(f(z))$ と書き表す。計算すると、次のようになる。

$$g(f(z)) = \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}$$

例えば、例 4 の f, g について見ると、次のようになる。

$$g \circ f(z) = \frac{2z+1}{3z+1}, \quad f \circ g(z) = \frac{2z+3}{z+1}$$

このように、多くの場合 $g \circ f(z) \neq f \circ g(z)$ となる。

逆変換 一次分数変換 $w = f(z)$ に対し、 $f \circ g(w) = w, g \circ f(z) = z$ となる $z = g(w)$ を $w = f(z)$ の逆変換と呼び、 $g(w) = f^{-1}(w)$ とかく。実際計算すると、

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

定理 5 一次分数変換は、次の三つの一次分数変換の合成で表せる。

- (i) $w = az$ ($a \neq 0$) 定数倍。
- (ii) $w = z + b$ 平行移動。
- (iii) $w = \frac{1}{z}$ 反転。

証明 (1) $c = 0$ の場合。 $f(z) = az + b$ ($a \neq 0$)。これは、(i) と (ii) の合成である。
 (2) $c \neq 0$ の場合。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{z + d/c} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a(z + d/c) + b - ad/c}{z + d/c} \cdot \frac{1}{c} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{z + d/c} \cdot \frac{1}{c^2} = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

定理 6 (円々対応)

- (i) 一次分数変換は、 $\hat{C}$ の円を $\hat{C}$ の円へ写す。
- (ii) $\hat{C}$ の二点 z_0, z_0^* は円 C に関して鏡像であるとし、 $w = f(z)$ を任意の一次分数変換とする。
 $w = f(z)$ で円 C を変換したものを $C' = (f(C))$ とすると、 z_0, z_0^* が f で変換された二点 $f(z_0), f(z_0^*)$ は、 C' に関して鏡像である。

証明 証明には、アポロニウスの円 (2) を考える。今の場合、

$$\left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right| = k \quad (7)$$

である。 $w_0 = f(z_0), w_0^* = f(z_0^*)$ とおく。証明には、定理 5 の基本的な三種の一次分数変換について示せば十分である。

定数倍 $w = az$ の場合を考える。式 (7) を w で記述すると、

$$\left| \frac{\frac{w}{a} - z_0}{\frac{w}{a} - z_0^*} \right| = k$$

となり、変形して

$$\left| \frac{w - w_0}{w - w_0^*} \right| = k$$

これは、変換先でのアポロニウスの円 C' を決め、 w_0, w_0^* は C' に関して鏡像であることを示している。

平行移動、反転についても同様に示される。

3 非ユークリッド幾何学

3.1 円に直交する円をかく

問題 8 円 C とその円内に相異なる二点 w_1, w_2 を任意に与える。この時、 w_1, w_2 を通り円 C に直交する円をかく。

3.2 上半平面 H

複素平面 C で、原点を中心とし半径 1 の円を C_0 、その内部を Δ (デルタ) で表す。

複素平面 C の点 $z = x + iy$ で、 $y > 0$ として表される点の全体を上半平面と呼び、 H で表す。

H の点 z と Δ の点 w は、次の一次分数変換で写り合う。

$$w = f_0(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad (9)$$

$f_0(i) = 0, f_0(\infty) = 1$ である。 z が実数 R に属するば、 $z = \bar{z}$ (複素共役) である。このとき、 $|f_0(z)| = 1$ 。つまり、実数の全体 R と無限遠点 ∞ が、丁度円 C_0 に写されている。アポロニウスの円 $|\frac{z-i}{z+i}| = 1$ は、実軸 R と ∞ を合わせたもので、 $i, -i$ はそれに関して鏡像である。それらは、 f_0 により C_0 に関する鏡像 $0, \infty$ に写されている。

【等角性】 一次分数変換は、角度を保つ。特に、互いに直交する二つの円は、互いに直交する二つの円に写される。

$w = f_0(z)$ について、例えば $f_0(0) = -1$ で、実軸は C_0 へ、虚軸は実軸へ写されるので、確かに直交関係は、保たれている。以上より、次が分かる。

【問題 8 の答え】 w_1 の C_0 に関する鏡像 w_1^* を求め、三点 w_1, w_1^*, w_2 を通る円 E が求めるものである。

上半平面 H では、もっとやさしく、 w_1, w_2 に写る点 z_1, z_2 を求め、実軸上に中心を持ち z_1, z_2 を通る円をかけばよい。

円 E 上にない Δ 内の点 a をとると、 a を通り E と交わらず C_0 と直交する円が二つ以上かける。

3.3 非ユークリッド幾何学

ユークリッドの公準

- (i) どの点からどの点へんも直線を引くことができる。
- (ii) 直線は、どこまでも延ばすことができる。
- (iii) 点と半径を決めれば、円をかくことができる。
- (iv) 全ての直角は、等しい。
- (v) ある直線とその上にない点を任意に与えたとき、その点を通りその直線に平行 (交わらない) 直線が唯一つ存在する。

第 5 の公準 (v) を無視する。ロバチェフスキーとボリヤイによる非ユークリッド幾何学の始まり (1820 年頃)。

- 平行線は、全く存在しない。 $\implies$ 楕円 (球面) 幾何学。
- 平行線が、二つ以上存在する。 $\implies$ 双曲幾何学。

問題 8 に答えることは、定規とコンパスで平面上に “非ユークリッド幾何学” を実現することになる。一次分数変換 (9) により、 H の双曲幾何学と Δ のそれとが、同一視される。

双曲幾何学は、HYPERBOLIC GEOMETRY の訳語ですが、共にギリシャ語源の言葉。HYPERBOLIC は、辞書をみると、通常の意味は、“excessive、大げさな、誇張された” という意味です。

この幾何学の延長線上に、現在 “**小林双曲的多様体の理論**” という小林昭七先生により創始された先端研究分野があります。

4 東西に於ける歴史的背景

西洋

- 1543 年 地動説 コペルニクス。
- 1609 年 望遠鏡観測による実証 ガリレイ。
- 1789 年 フランス革命
- 1820~30 年 非ユークリッド幾何（双曲幾何）ロバチェフスキー（ロシア）、ボリヤイ（ハンガリー）。

日本

- 1336~1573 年 室町時代。
- 1543 年 織田信長誕生、種子島に鉄砲伝来。
- 1640~1708 年 関孝和 行列式など和算の確立。
- 1804~30 年 江戸時代 文化・文政
 - － 伊能忠敬（1745~1818）伊能図「大日本沿海輿地全図」（大、中、小）地球を実測 子午線 1 度 = 28 里 2 分 = 110.75Km。
現代の測定値との誤差 $\div 10^{-3}$ 。
 - － 葛飾北斎（1760~1849）富嶽三十六景。
 - － 本居宣長（1730~1801）古事記伝、日本の学問の確立。

【伊能大図】 214 面、正本は、明治初期に焼失、従来 60 面しか存在が分からなかった。2001 年、写し 207 面が渡辺一郎氏（伊能忠敬研究会代表理事）によりアメリカ・ワシントン議会図書館で発見された。欠図 7 中の 2 面が同年佐倉の国立民族博物館で発見された。

4.1 国際化

国際化あるいはグローバリゼーションの世の中で、これから益々国際的に活躍することになる若い皆さんへの推薦書。

日本の三大古典

- (i) 古事記。
- (ii) 日本書紀。
- (iii) 万葉集 — 選集、例えば「万葉秀歌 上下、斎藤茂吉、岩波新書」。





不三見原

富嶽三十六景 尾州不三見原

