高校生のための現代数学講座
「複素数」
講義 (2)　関口 英子

東京大学
玉原国際セミナーハウス
2008 年 7 月 26 日

(2) 複素数における一次分数変換

(2)-1

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (ただし, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ とする)
に対して.

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

とおく.
$w = f(z)$ を z の一次分数変換という.

例(2)-2

① $\alpha=\delta=1$, $\gamma=0$ とすると.

$$w=z+\beta$$

②-1 αを正の実数, $\beta=\gamma=0$, $\delta=1$ とすると.

$$w=\alpha z=\alpha\cdot|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

②-2 αを$|\alpha|=1$をみたす複素数, $\beta=\gamma=0$, $\delta=1$ とすると.

$$w=\alpha z=|z|(\cos(\theta+\theta_0)+i\sin(\theta+\theta_0))$$

(ここで $\alpha=\cos\theta_0+i\sin\theta_0$)

③ $\alpha=\delta=0$, $\beta=\gamma=1$

$$w=\frac{1}{z}$$

(2)-3 一次分数変換の合成

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (それぞれ $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0$ をみたす) に対して一次分数変換

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$u = g(w) = \frac{\alpha' w + \beta'}{\gamma' w + \delta'}$$

を考える. f と g の合成は

$$u = g \circ f(z) = g(f(z))$$

$$= \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma) z + \alpha'\beta + \beta'\delta}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma) z + \gamma'\beta + \delta'\delta}$$

である.

合成 $g \circ f$ も一次分数変換である

(2)-4

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ をみたす複素数とする.
ここでは 特に $\gamma \neq 0$ の場合を考える.

$$z' = f_1(z) = z + \frac{\delta}{\gamma}$$

$$w'' = f_2(z') = \frac{1}{z'}$$

$$w' = f_3(w'') = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\, w''$$

$$w = f_4(w') = w' + \frac{\alpha}{\gamma}$$

と. おく

$$w = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$$

$$= f_4(f_3(f_2(f_1(z))))$$

$$= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

(2)-5

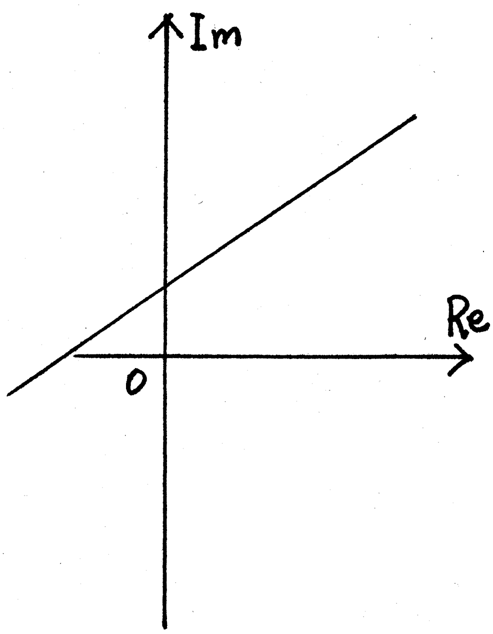
$$w = f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} & \left(z \neq -\dfrac{\delta}{\gamma},\ \infty\right) \\ \infty & \left(z = -\dfrac{\delta}{\gamma}\right) \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} & (z = \infty) \end{cases}$$

と定めると

f は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への対応

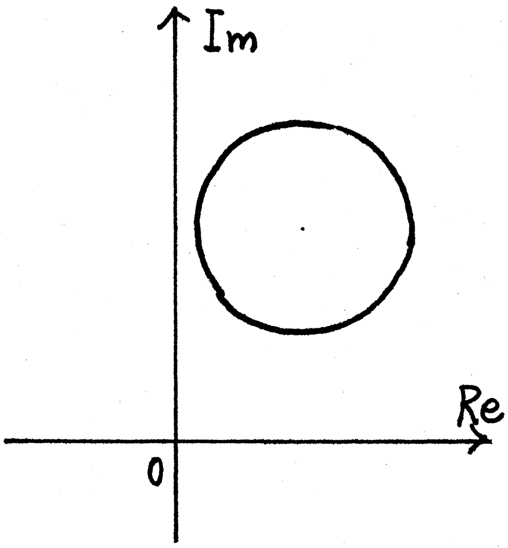
を定義する

(2)-6 複素数平面上の直線と円



$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + c = 0$$

（β は 0 でない複素数，
c は実数）



$$a z \cdot \bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + c = 0$$

（$\beta \bar{\beta} - ac > 0$，
a, c は実数，$a \neq 0$
β は複素数）