

## 「複素数平面における逆数」

### 1 複素数の逆数

2つの複素数  $\alpha, \beta$  の積  $\alpha\beta$  に対し、以下が成り立つ。

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta$$

- $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$  という単位円周上の点を掛ける  $\Rightarrow$  原点を中心とする偏角  $\theta$  の回転
- $\alpha = r$  という正の実数を掛ける  $\Rightarrow$  原点中心の  $r$  倍の相似拡大

$$\alpha \times \square = 1$$

となる複素数  $\square$  すなわち、 $\alpha$  の逆数  $\frac{1}{\alpha}$  は、 $\alpha \neq 0$  のとき存在して

$$\left| \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}, \quad \arg \frac{1}{\alpha} = -\arg \alpha$$

で定まる。極形式を使えば以下のように表せる。

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

$$\text{とくに } |\alpha| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$$

### 2 複素数平面における逆数

$w$  を複素数  $z$  の逆数とする。

- 複素数  $z$  が単位円周上にあれば  $w$  はその共役複素数で、実軸に対して対称な点となる。よって  $z$  が単位円周上を1から反時計回りに回転すると、 $w$  は単位円周上を1から時計回りに  $z$  と同じ速さで回転する。
- $z$  が原点を中心とする半径  $r$  の円周上を点  $r$  から反時計回りに回転すると、 $w$  は原点を中心とする半径  $\frac{1}{r}$  の円周上を点  $\frac{1}{r}$  から時計回りに回転する。
- 原点を始点とする偏角が  $\theta$  の半直線上で  $z$  が単位円周との交わりの点から原点に向かって動くとき、 $w$  は原点を始点とする偏角が  $-\theta$  の半直線上を単位円周との交わりの点から原点から遠ざかる方に動く。
- 原点を始点とする偏角が  $\theta$  の半直線 (原点は除く) は、この変換で、原点を始点とする偏角が  $-\theta$  の半直線 (実軸に対して対称な半直線) に移る。

複素数平面内のある図形が  $w = \frac{1}{z}$  という変換で移る図形を元の図形の反転という。

- 反転を2回行うともとの図形に戻る
- 実軸に関して対称な図形の反転は、実軸に対して対称 ( $\Leftarrow \bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$ )

### 3 円々対応

円の中心を原点からずらしたとき、円の反転がどう変わるか調べてみよう。

原点を中心に図形を  $\theta$  だけ回転すると、反転は  $\theta$  だけ逆方向に回転する。

よって、ずらして反転した図形が何になるかは、実軸の正の方向のずらしのみ考えれば分かる。

非負の実数  $a$  を中心とする半径  $r$  の円、すなわち  $a \pm r$  を直径の両端とする円は、以下の式を満たす複素数  $z$  で定義される図形に対応する

$$|z - a| = r \iff (z - a)(\bar{z} - a) = r^2 \iff z\bar{z} - a(z + \bar{z}) + a^2 - r^2 = 0$$

$w = \frac{1}{z}$  であるから

$$\frac{1}{w\bar{w}} - a\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + a^2 - r^2 = 0 \iff (a^2 - r^2)(w\bar{w}) - a(w + \bar{w}) + 1 = 0$$

1.  $r^2 \neq a^2$  ならば、 $\frac{1}{a^2 - r^2} = \frac{a^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{r^2}{(a^2 - r^2)^2}$  より

$$w\bar{w} - \frac{a(w + \bar{w})}{a^2 - r^2} + \frac{1}{a^2 - r^2} = \left(w - \frac{a}{a^2 - r^2}\right)\left(\bar{w} - \frac{a}{a^2 - r^2}\right) - \frac{r^2}{(a^2 - r^2)^2}$$

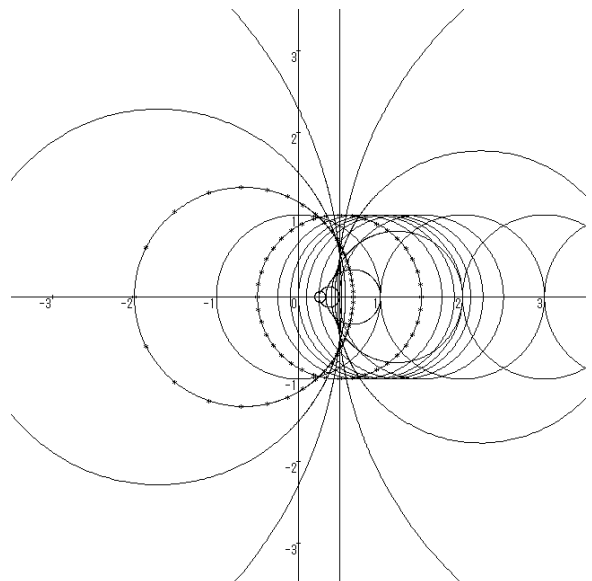
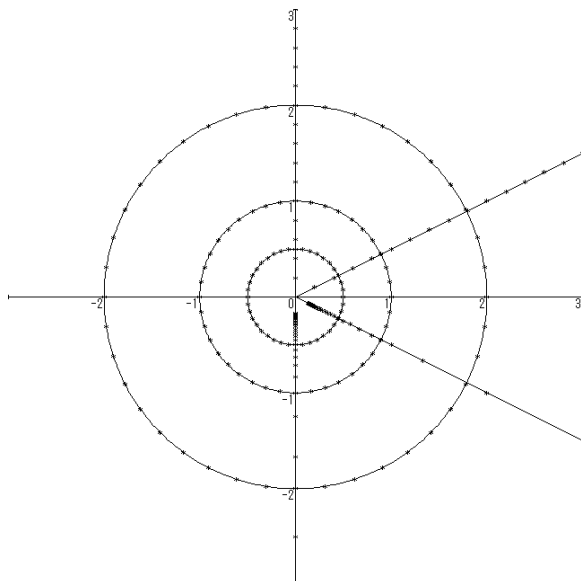
であるから、中心が  $\frac{a}{a^2 - r^2}$  で半径が  $\frac{r}{|a^2 - r^2|}$  の円、すなわち  $\frac{1}{a \pm r}$  を直径の両端とする円に移る（直径の両端は反転で  $a \pm r$  から  $\frac{1}{a \pm r}$  に移る）。

2.  $r^2 = a^2$  ならば  $\frac{1}{2a}$  を通る虚軸に平行な直線に移る。

定理（円々対応）．複素数平面内の円または直線の反転は、円または直線となる。

注意．1) 円または直線はその図形上の異なる 3 点で定まるから、実際にどのような円または直線に移るかは、適当な 3 点の像がどこに移るか分かれば定まる。

2) 0 の反転を  $\infty$ 、 $\infty$  の反転を 0、直線を  $\infty$  を通る円と考えれば、反転によって「円」は「円」に移る。

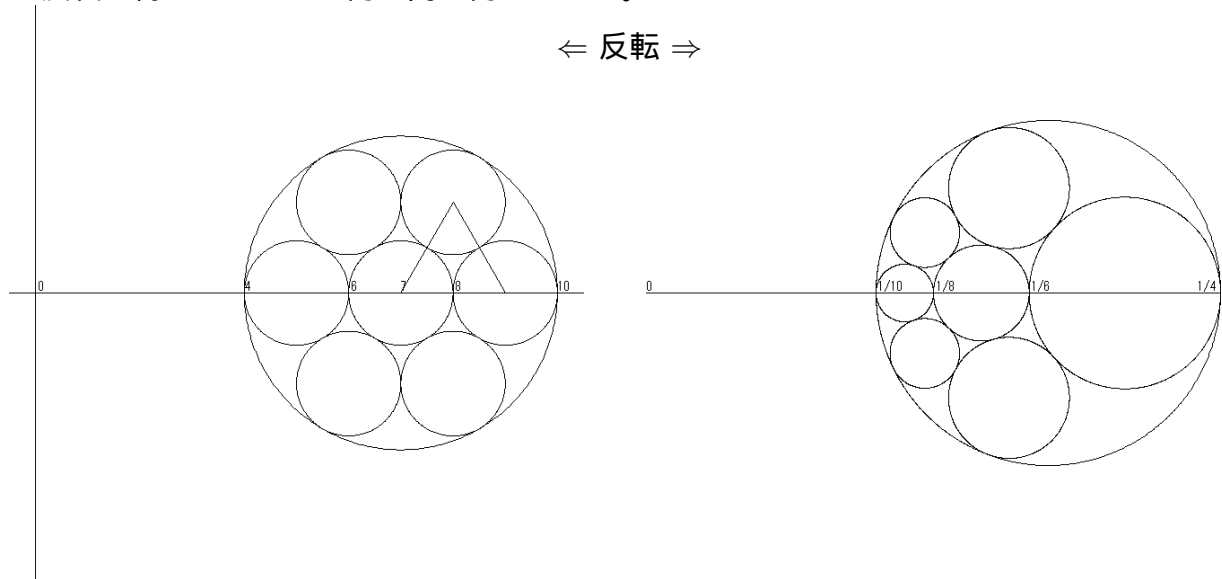


## 4 図形の反転

例 1. 半径 1 の円の外側の回りには同じ大きさの円を互いに接するように順に丁度 6 個並べることができる。また外側の 6 個の円全ての円に接する半径 3 の円が描ける。

最初の円の中心を実軸上の点 7 において、反転で円がどう移るか見よう。

最初の半径 1 の円の直径の両端 : 6 と 8  $\mapsto \frac{8}{48}$  と  $\frac{6}{48}$  となるので中心  $\frac{7}{48}$ , 半径  $\frac{1}{48}$  の円へ  
 大きな半径 3 の円の直径の両端 : 4 と 10  $\mapsto \frac{10}{40}$  と  $\frac{4}{40}$  となるので中心は  $\frac{7}{40}$ , 半径  $\frac{3}{40}$  の円へ  
 反転で得られた 2 つの円は同心円ではない。



上記の円の間、どちらの円にもピッタリ接するように円を順に描いていくと、どこから描き初めても 6 個目の円を描いたとき、最初の円に丁度接することが分かる。

反転した元の世界で見れば、同心円の間、円を描くことになるが、それはどこから初めても 6 個目の円を描いたとき、最初の円に丁度接することは明らかである。

注意. (48 倍してみると) 中心を 1.4cm ずらして描いた半径 3.6cm の円と半径 1cm の円が、この 2 つの円の配置にあたる。

反転の応用として、この考え方で以下のことが分かる

定理 (シュタイナー). 2 つの円があって、一方の円内に他方があるとする。

両者の円の間、互いに接するように円を描く。

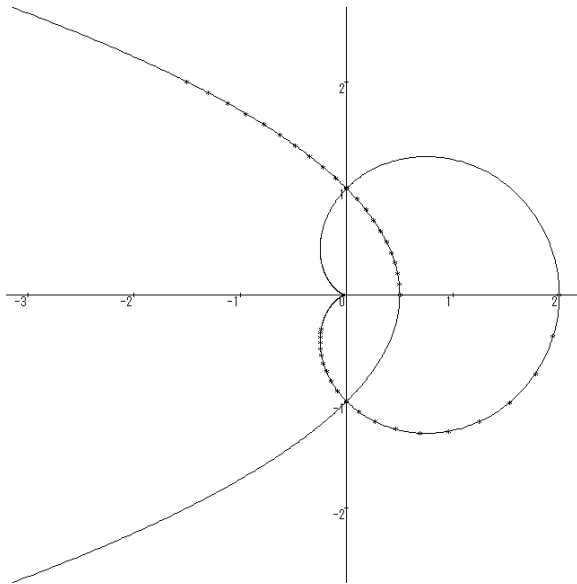
何個目かの円を描いて最初描いた円と初めて共通点を持つとき、丁度接しているかどうかは、もとの 2 つの円で決まっていて、最初の円を描く位置には依らない。

参考. 1) 同心円でないとき、2 円の中心を通る直線と円が交わる 4 点を考え、その端点からの距離を  $a, b, c$  ( $0 < a < b < c$ ) とし、その直線を実軸として、端点を実軸上の点  $x$  に置く。反転して同心円にするには、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+c} = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$  を満たすように  $x$  をとればよい。

2) 最初の円上の点や 2 つの円の間、の点を原点にとって反転するとどのようなことが言えるか考えてみよう。

## 例 2. 放物線とカージオイド

次の例では、放物線とカージオイド（心臓形）が反転で移り合っている。

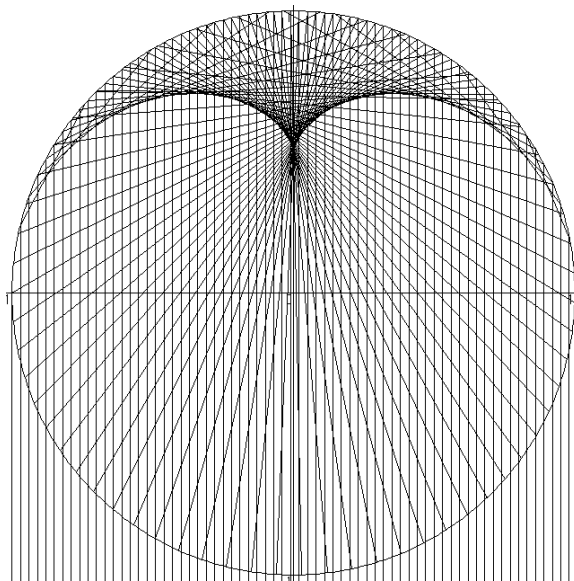


参考 . カージオイドは、 $r = 1 + \cos \theta$  を満たす点の図形である。

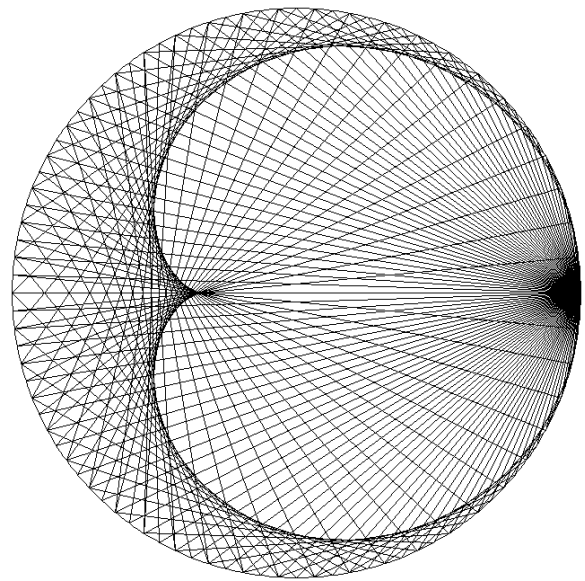
これを反転した図形は  $\frac{1}{r} = 1 + \cos \theta$  を満たす点の図形となる。

$r(1 + \cos \theta) = 1$  を  $x$ - $y$  座標で表すと  $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 1$  となり、 $x^2 + y^2 = (1 - x)^2$  から  $2x = 1 - y^2$  が得られる。

カージオイドは、ミルクティーの入ったカップに光を当てたときに明るく見える形と同じ種類の図形である。



下からの平行光線



円の右端の点光源

その他、カージオイドが現れる例

- 固定した半径 1 の円の回りを、周上の 1 点に印をつけた半径 1 の円が滑ることなく廻るとき、その印が描く軌跡
- 固定した円に接しながら回転する直線への円周上の固定した 1 点からの垂線との交点の軌跡