高校生のための現代数学講座
「複素数」
講義 (2)　関口 英子

東京大学
玉原国際セミナーハウス
2008 年 7 月 19 日

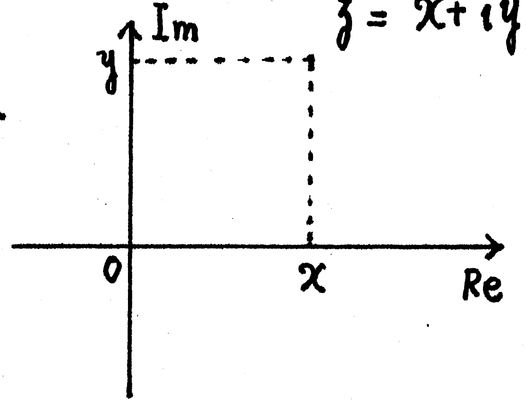
複素数の絶対値

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し、

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

と定め、$|z|$ を z の絶対値という。

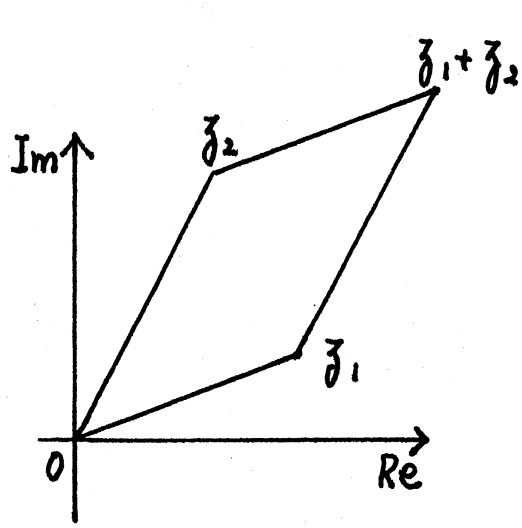
$z = x + iy \longmapsto$



- $|z| \geqq 0$
- z が実数のとき $|z|$ は実数の絶対値と一致する
- 複素数 z_1, z_2 に対して

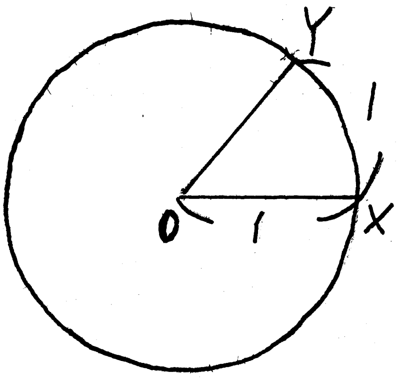
$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

が成り立つ。(三角不等式)



弧度法について

角の大きさを表す方法…度数法, 弧度法



Oを中心として半径1の円を考える

∠XOYが切りとる円弧の長さが1のとき

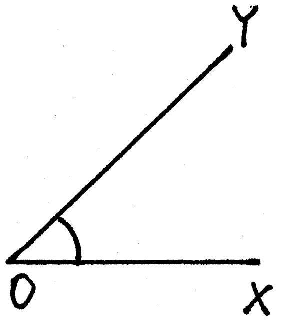
∠XOYの大きさを1ラジアンといい,

これを単位として角の大きさを測る方法を弧度法という

全角の大きさ $= 2\pi$ ラジアン

平角の大きさ $= \pi$ ラジアン

直角の大きさ $= \frac{\pi}{2}$ ラジアン

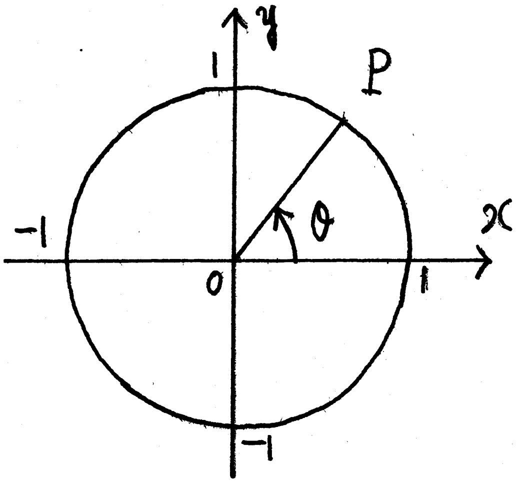


∠XOYの大きさ $= a^\circ = \theta$ ラジアン

$$\frac{a}{360} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\theta = \frac{\pi}{180}a, \quad a = \frac{180}{\pi}\theta$$

三角関数



半径1の円周上の点Pの座標を考える

Pの座標 (x, y) … x軸の正の部分とOPのなす角θで決まる

$(\cos\theta, \sin\theta)$ と表す.

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ である

また

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \\ \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \end{cases} \quad (n\text{は整数})$$

が成り立つ.

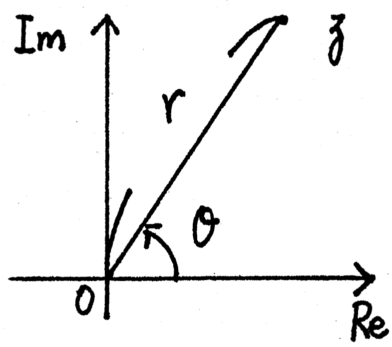
$\cos\theta$ … 余弦関数
$\sin\theta$ … 正弦関数

複素数の偏角

複素数 $z = x + iy$ ($\neq 0$; x, y は実数) は

(1) $\qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

と表すことができる.



$$r = |z| \quad (r > 0)$$

である.
θ を $\theta = \arg z$ と表し z の偏角という.

(1) を z の 極座標表示という.

- $\theta = \arg z$ ならば $\theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \theta + 6\pi, \cdots$ も $\arg z$ と等しい. すなわち

$$\arg z = \theta + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である.

例 0でない複素数 z に対し

- z が実数 $\iff \arg z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$
- z が純虚数 $\iff \arg z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \cdots$

定理

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)),$$

すなわち.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

が成り立つ.

系

- $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_n|$
- $\arg(z_1 z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n$

系 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると. 整数 n に対して.

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$$

が成り立つ.

すなわち.

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg(z^n) = n \arg z$$