高校生のための現代数学講座 東京大学
「複素数」 玉原国際セミナーハウス
講義 (1) 大島 利雄 2008 年 7 月 19 日

「複素数平面」

1 複素数

$$\text{数とは？}\quad\begin{cases}\text{自然数} & 1,2,3,\ldots\\ \text{有理数（分数）} & \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\ldots\\ \text{整数} & \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\\ \text{実数} & 2.718,\sqrt{2},\pi,\ldots\end{cases}$$

これらの数には、和 $+$ と積 $\times$ という演算が定義されている。
それらの逆の演算である引き算 $-$ と割り算 $\div$ が考えられる。

- 自然数同士の足し算 $\Rightarrow$ 自然数

  $3+\square=2$ (自然数の中では解なし）$\Rightarrow$ $\square=2-3=-1$: 負の数

- 自然数同士の掛け算 $\Rightarrow$ 自然数

  $3\times\square=2$ (自然数の中では解なし）$\Rightarrow$ $\square=2\div 3=\frac{2}{3}$: 分数

- 実数の 2 乗は 0 または正の実数

  $\square^2=2$ (有理数の中では解なし）$\Rightarrow$ $\square=\sqrt{2}$: 無理数（$\square=-\sqrt{2}$ も解となる）

  $\square^2=-1$ (実数の中では解なし）$\Rightarrow$ これを満たす「数」を導入し、それを i と表して**虚数単位**という（$\square=-i$ も解となる）

$$\text{虚数（imaginary number）} \longleftrightarrow \text{実数（real number)}$$

複素数（complex number）はこれらを含む「数」

$$2i,\ \sqrt{2}i,\ 3+2i,\ 4-3i,\ldots$$

複素数 α とは、実数 a, b を用いて

$$\alpha=a+bi$$

と表せる「数」
a を α の**実部** (real part)、b（または bi）を α の**虚部** (imaginary part) という。

- **和**： $(3+2i)+(4+i)=(3+4)+(2i+i)=7+3i$

$$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di \text{ のとき } \alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$$

- **積**： $(3+2i)(4+i) = 3\cdot 4 + 3i + 2i\cdot 4 + 2i^2 = 12 + 3i + 8i - 2 = 10 + 11i$

$$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di \text{ のとき } \alpha\cdot\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- **方程式**： r を正の実数とするとき、$x^2 = -r$ には 2 つの解 $x = \pm\sqrt{r}i$ がある。より一般に、2 次方程式は複素数まで考えるといつでも解ける。

  2 次方程式：　$ax^2 + bx + c = 0$　($a,\ b,\ c$ は実数で、$a \neq 0$)

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \end{aligned}$$

$$x = \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & (b^2 - 4ac > 0)：2\text{ つの解は実数} \\ -\dfrac{b}{2a} & (b^2 - 4ac = 0)：2\text{ つの解は実数で重なっている} \\ -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i & (b^2 - 4ac < 0)：2\text{ つの解は実数でなくて複素数} \end{cases}$$

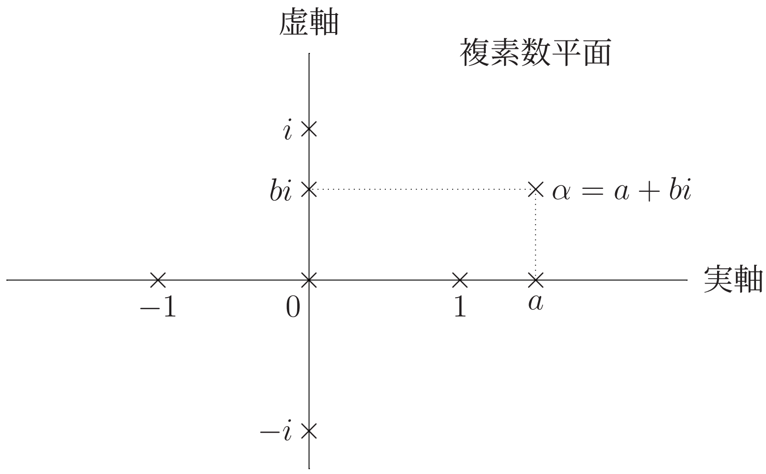
2　複素数平面

数直線： 直線上に 0 にあたる点と単位の長さを決めて 1 に対応する点を定めると、直線上の「目盛り」として実数は直線上の点と対応する。

複素数平面： i は実数を表す数直線上にない。そこで x-y 平面で x-軸を実数を表す数直線と考え、y-軸上の単位の点が i を表す点と考える。さらに $\alpha = a + bi$ という点は、平面座標が (a, b) の点に対応すると考える。

$$\text{複素数} \longleftrightarrow \text{平面上の点},\quad \alpha = a + bi \ \leftrightarrow\ (a, b)$$

このように考えたとき、x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**、x-y 平面を複素数平面という。



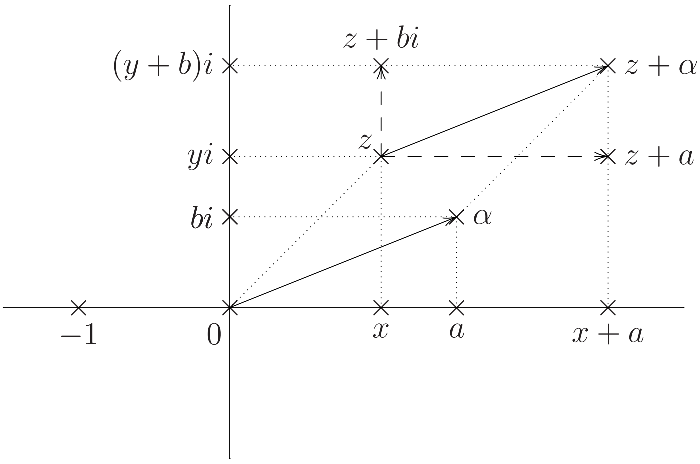
$\alpha = a + bi$ とする。複素数 $z = x + yi$ に α を加える、あるいは α 倍すると，複素数平面の点 z がどこに移るかを考えてみよう。

2.1 和

- 実数 a を加える $\Rightarrow$ z を実軸（x 軸）の正の方向へ a だけ移動する。
- 虚数 bi を加える $\Rightarrow$ z を虚軸（y 軸）の正の方向へ b だけ移動する。
- 複素数 $\alpha = a + bi$ を加える $\Rightarrow$ z を原点から α へ向かう方向と並行に、0 と α を結ぶ線分の長さだけの距離の平行移動する。

  $z + \alpha$ は、α, 原点, z をこの順に平行四辺形の 3 頂点とする残りの頂点になる。

$$z \mapsto z + \alpha = (x + yi) + (a + bi)$$



2.2 積

- 正の実数 a を掛ける $\Rightarrow$ 原点を始点として z を結ぶ半直線上で、原点からの距離が a 倍された点に移動する。
- -1 を掛ける $\Rightarrow$ z は原点を中心にして 180 度回転した位置に移動する。

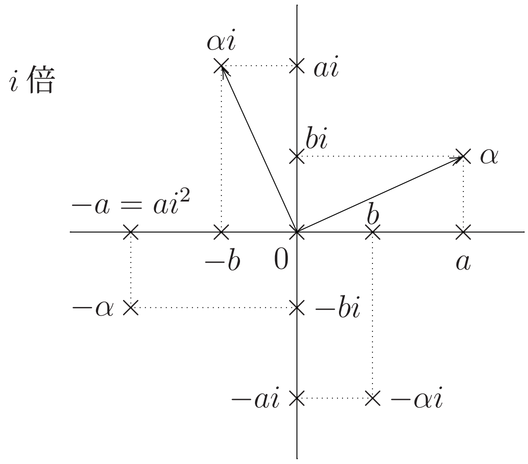
  これを 2 回続けておこなうと、$(-1)^2$ 倍、すなわち 1 倍することになり、360 度回転となって、もとの位置から動かない（$360 = 180 \times 2$）
- 虚数単位 i を掛ける $\Rightarrow$ z は原点を中心にして 90 度反時計回りに回転した位置に移動する。

  これを 2 回続けておこなうと、i^2 倍、すなわち -1 倍することになり、180 度回転

  これを 3 回続けておこなうと、i^3 倍、すなわち $-i$ 倍することになり、270 度回転

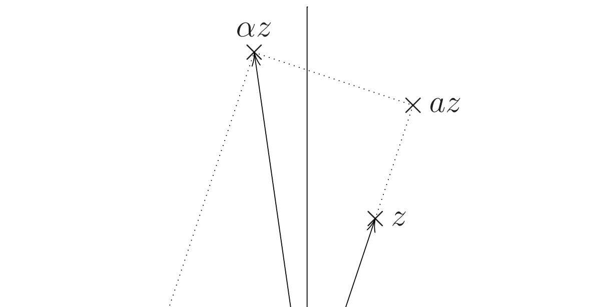
  これを 4 回続けておこなうと、i^4 倍、すなわち 1 倍することになり、360 度回転となって、もとの位置から動かない

$$
\begin{array}{lllllllll}
* & & \times i & & \times i^2 & & \times i^3 & & \times i^4 \\
a & \mapsto & ai & \mapsto & ai^2 = -a & \mapsto & ai^3 = -ai & \mapsto & ai^4 = a \\
bi & \mapsto & bi^2 = -b & \mapsto & bi^3 = -bi & \mapsto & bi^4 = b & \mapsto & bi^5 = bi \\
\alpha & \mapsto & \alpha i & \mapsto & \alpha i^2 = -\alpha & \mapsto & \alpha i^3 = -\alpha i & \mapsto & \alpha i^4 = \alpha
\end{array}
$$



- $\alpha = a + bi$ を掛ける $\Rightarrow$ 原点を中心に x 軸の正の方向が α の方向になるまで（角度 $\alpha 0 a$ だけ）回転し、さらに「原点から α までの長さ」倍だけ原点を中心に相似拡大した位置に移動する。

$a > 0,\ b > 0$ のときの図



$0, a, \alpha, bi$ も $0, az, \alpha z, biz$ も辺の長さの比が $a : b$ の長方形の 4 頂点なので

a : (0 と α を結ぶ線分の長さ)

$=$ (0 と z を結ぶ線分の長さの a 倍) : (0 と αz を結ぶ線分の長さ)

0 と αz を結ぶ線分の長さ

$=$ (0 と z を結ぶ線分の長さ) $\times$ (0 と α を結ぶ線分の長さ)

注意. $(\alpha i)z = i(\alpha z),\ (\alpha i^2)z = i^2(\alpha z),\ (\alpha i^3)z = i^3(\alpha z)$ となるので、α が他の象限にあるときも上の結果から分かる。