高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　東京大学
「面積と体積」　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義(3)　楠岡成雄　　　　　　　　　　　　　　　2007年7月28日

「面積体積と乱数」

関数の不等式により定められた図形の面積や立体の体積、さらには４次元以上の空間内の超立体の「体積」を数値的に求めることは、数学の応用において大変重要である。しかし、それは一般には簡単なことではない。

例えば、何本もの１次不等式で与えられた領域の面積を求めることは、容易ではない。

半径１の円は $x^2+y^2 \leqq 1$ で定められる xy-平面の図形で、その面積は円周率 π である。実は

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{4}{1+x^2}$$

で定められる領域の面積も π となる。

しかし、これらの領域は、まだ「計算可能」なものであり、一般には面積がどのような値となるかがあらかじめわからないものが多く、その面積の近似値を求めることが数学の応用では重要となる。

計算を実際に実行するにはコンピュータを用いることが多い。

今、xy-平面の中の図形（D で表すことにとしよう）が関数の不等式で与えられているとしよう。さらに、図形 D は正方形（$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$）に含まれることがわかっているとしよう。小学校で教わるこの図形 D の面積を計算するやり方は, 方眼紙にこの図形を書いて、図形に含まれる小正方形の数を数えるという方法であるが、実際にやってみた人も多いと思う。これをコンピュータにやらせるには、まず大きな数（例えば 1000 としよう）を分母とする分数の組を考え、その組で決まる xy 平面上の点がいくつ図形 D に含まれるかを数え、それを $1,000,000$ で割ると図形の近似値が求められる。（点 (x,y) が図形 D にはいるかどうかは関数不等式を満たすかどうかをチェックすればよい）分母にする数を増やしていくと、このやり方で得られる量が面積に近づいていくはずである。

実は、このような方法はあまり効率がよくない。もしこの方法で体積を計算すると 10^9 回、計算する必要がある。もし、10 次元の超立体の「体積」を計算するには、10^{30} の計算回数が必要となる。

この講演では、疑似乱数、準乱数を用いて面積、体積を計算する全く違った方法を紹介し、計算を実行してもらう予定である。

ハルトン	2	3	5
1	0.5	0.333333	0.2
2	0.25	0.666667	0.4
3	0.75	0.111111	0.6
4	0.125	0.444444	0.8
5	0.625	0.777778	0.04
6	0.375	0.222222	0.24
7	0.875	0.555556	0.44
8	0.0625	0.888889	0.64
9	0.5625	0.037037	0.84
10	0.3125	0.37037	0.08
11	0.8125	0.703704	0.28
12	0.1875	0.148148	0.48
13	0.6875	0.481481	0.68
14	0.4375	0.814815	0.88
15	0.9375	0.259259	0.12
16	0.03125	0.592593	0.32
17	0.53125	0.925926	0.52
18	0.28125	0.074074	0.72
19	0.78125	0.407407	0.92
20	0.15625	0.740741	0.16
21	0.65625	0.185185	0.36
22	0.40625	0.518519	0.56
23	0.90625	0.851852	0.76
24	0.09375	0.296296	0.96
25	0.59375	0.62963	0.008
26	0.34375	0.962963	0.208
27	0.84375	0.012346	0.408
28	0.21875	0.345679	0.608
29	0.71875	0.679012	0.808
30	0.46875	0.123457	0.048
31	0.96875	0.45679	0.248
32	0.015625	0.790123	0.448
33	0.515625	0.234568	0.648
34	0.265625	0.567901	0.848
35	0.765625	0.901235	0.088
36	0.140625	0.049383	0.288
37	0.640625	0.382716	0.488
38	0.390625	0.716049	0.688
39	0.890625	0.160494	0.888
40	0.078125	0.493827	0.128
41	0.578125	0.82716	0.328
42	0.328125	0.271605	0.528
43	0.828125	0.604938	0.728
44	0.203125	0.938272	0.928
45	0.703125	0.08642	0.168
46	0.453125	0.419753	0.368
47	0.953125	0.753086	0.568
48	0.046875	0.197531	0.768
49	0.546875	0.530864	0.968
50	0.296875	0.864198	0.016

	2	3	5
51	0.796875	0.308642	0.216
52	0.171875	0.641975	0.416
53	0.671875	0.975309	0.616
54	0.421875	0.024691	0.816
55	0.921875	0.358025	0.056
56	0.109375	0.691358	0.256
57	0.609375	0.135802	0.456
58	0.359375	0.469136	0.656
59	0.859375	0.802469	0.856
60	0.234375	0.246914	0.096
61	0.734375	0.580247	0.296
62	0.484375	0.91358	0.496
63	0.984375	0.061728	0.696
64	0.007813	0.395062	0.896
65	0.507813	0.728395	0.136
66	0.257813	0.17284	0.336
67	0.757813	0.506173	0.536
68	0.132813	0.839506	0.736
69	0.632813	0.283951	0.936
70	0.382813	0.617284	0.176
71	0.882813	0.950617	0.376
72	0.070313	0.098765	0.576
73	0.570313	0.432099	0.776
74	0.320313	0.765432	0.976
75	0.820313	0.209877	0.024
76	0.195313	0.54321	0.224
77	0.695313	0.876543	0.424
78	0.445313	0.320988	0.624
79	0.945313	0.654321	0.824
80	0.039063	0.987654	0.064
81	0.539063	0.004115	0.264
82	0.289063	0.337449	0.464
83	0.789063	0.670782	0.664
84	0.164063	0.115226	0.864
85	0.664063	0.44856	0.104
86	0.414063	0.781893	0.304
87	0.914063	0.226337	0.504
88	0.101563	0.559671	0.704
89	0.601563	0.893004	0.904
90	0.351563	0.041152	0.144
91	0.851563	0.374486	0.344
92	0.226563	0.707819	0.544
93	0.726563	0.152263	0.744
94	0.476563	0.485597	0.944
95	0.976563	0.81893	0.184
96	0.023438	0.263374	0.384
97	0.523438	0.596708	0.584
98	0.273438	0.930041	0.784
99	0.773438	0.078189	0.984
100	0.148438	0.411523	0.032

36分割

8				
5				
2				
7				
4				
1				
6				
3				
0				
	0	2	1	3