球の体積と表面積

東京大学大学院数理科学研究科・教授　古田幹雄

1　円の面積と円周の長さ

半径 r の円の面積は πr^2 です。グラフ $v = \pi u^2$ の $u = r$ における接線の傾きを求めてみます。すると、答えは $2\pi r$ となります。これは半径 r の円周の長さです。つまり、**円の面積を半径で微分すると円周の長さになります。**逆にいえば、**円周の長さを積分すると円の面積がでてきます。**

　ポイントは、$h > 0$ **が充分小さな数であるとき、半径** r **の円と半径** $r + h$ **の円の間の部分の面積がほぼ**

$$2\pi r \cdot h$$

となることです。

2　球の体積と表面積

半径 r の球の体積は $\frac{3}{4}\pi r^3$ であることが知られています。（これについては、あとで説明します。）グラフ $v = \frac{3}{4}\pi u^3$ の $u = r$ における接線の傾きを求めてみます。すると、答えは $4\pi r^2$ となります。これは半径 r の球の表面積に等しくなります。つまり、**球の体積を半径で微分すると球の表面積になります。**逆にいえば、**球の表面積を積分すると、球の体積がでてきます。**

　ポイントは、$h > 0$ **が充分小さな数であるとき、半径** r **の球と半径** $r + h$ **の球の間の部分の体積がほぼ**

$$4\pi r^2 \cdot h$$

となることです。

3　球の体積と、球をスライスした円の面積

半径 1 の球の体積を次のような考え方で求めることができます。

- xyz 座標の入った空間に、原点を中心とする半径 1 の球が置かれているとしましょう。
- この球を平面 $x = r$ でスライスした断面は円になります。
- その円の面積は $\pi(1 - r^2)$ となります。
- 「接線の傾きが $\pi(1 - u^2)$ となるグラフ」を考えます。（つまり、スライスの面積の不定積分を求めます。）そのグラフの方程式は $v = \pi(u - u^3/3)$（あるいはそれに定数を加えたもの）となります。
- そのグラフの $u = 1$ における値から $u = -1$ における値を引いてみます。（つまり、スライスの面積を -1 から 1 まで積分した値を求めてみます。）
- **すると、半径** 1 **の球の体積** $\frac{3}{4}$ **が得られます。**

4　「4 次元の球」の「体積」

半径 1 の「4 次元の球」とは、

$$\{(x, y, z, w) \ \ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$$

という不等式であらわされる「点」の集合のことです。
　この「4 次元の球」の「4 次元の体積」を次のような考え方で求めてみます。

- $xyzw$ 座標の入った空間に、原点を中心とする半径 1 の球を考えます。（上の不等式で表されるものです。）
- xy 平面上の点は極座標 r, θ で表しておきます。
- この球を xy 平面上の極座標 (r, θ) で表される点に対応する「zw 平面と平行な平面」で切断したスライスは円になります。
- その円の面積は $\pi(1 - r^2)$ となります。
- $h > 0$ が充分小さな数であるとき、半径 r の円と半径 $r + h$ の円の間の部分の「4 次元的体積」はほぼ

  $$\{\pi(1 - r^2)\} \times (2\pi r \cdot h) = 2\pi^2(r - r^3) \cdot h$$

  となります。
- 「接線の傾きが $2\pi^2(u - u^3)$ となり、原点を通るグラフ」を考えます。
- そのグラフは $v = 2\pi^2(u^2/2 - u^4/4)$ となります。
- **そのグラフの $u = 1$ における値を求めると、$\pi^2/2$ となります。**
- **これが求める半径 1 の 4 次元球体の体積です。**

5　「4 次元の球」の「表面積」

「4 次元の球」の「表面積」の公式を求めてみましょう。
　まず、半径が r の「4 次元の球」の「4 次元的な体積」の公式を出します。「4 次元的な体積」は r^4 に比例します。ですから、公式は

$$\pi^2 r^4/2$$

となります。
　グラフ $v = \pi^2 u^4/2$ の接線の $u = r$ における傾きは

$$2\pi^2 r^3$$

となります。**これが求める 4 次元の球の「表面積」の公式です。**