高校生のための現代数学講座　東京大学
「面積と体積」　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　古田幹雄　2007 年 7 月 21 日

「面積と分数」

1　面積

三角形の面積、円の面積というと、公式を使って計算して値を出すことができます。たとえば、三角形や円の形に厚紙を切り抜いて、その重さを測ると、面積に比例した値になるに違いありません。

この講義では、厚紙を切り抜いて作ることができないような、ちょっと変わった図形の面積を考えて見ます。

2　「本当の正方形 A」と「分数正方形 B」

平面上の次のふたつの図形 A, B を考えます。

- xy 平面の中の、$0 \leq x \leq 1$ および　$0 \leq y \leq 1$　をみたす点 (x, y) の全体からできる図形を A と名づけます。すると、A は面積 1 の正方形です。
- A の中にある点であって、x 座標と y 座標がどちらも分数（有理数）であるようものを考えます。そのような点全体を B とおきます。

次の点 P, Q, R はいずれも A の点です。

$$P = \left(\frac{34534}{98833}, \frac{234}{327}\right), \qquad Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0.5\right), \qquad R = (\frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{4})$$

このうち、P は B の点ですが、Q, R は B の点ではありません。

3　「分数正方形」は「すかすか正方形」

「B の面積」はいくつでしょうか？

講義では、B を次のような無限個の正方形 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ を使ってすっぽり覆うやり方を具体的に説明します。それらの正方形の一辺の長さは、0.01 から始まって順番に

$$A_1 : 0.01, \quad A_2 : 0.001, \quad A_3 : 0.0001, \quad A_4 : 0.00001 \ldots$$

と 10 分の 1 倍ずつ小さくなっていきます。そして

$$B \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

となっています。すると、これらの全ての正方形の面積の総和は、

$$a = 0.00010101010101....$$

となります。これは、B の「面積」が、いくら広かったとしても、上の数 a よりも広いことはない、ということを意味しています。つまり、**面積１の正方形 A の中で、B の占める割合は、**0.001 **もない**、ということになります。

$\cdots\cdots$ 面積を考えることによって**「分数というのは、実数全体の中で、ほんのわずかの部分を占めているにすぎない」ということがわかるのです。**