高校生のための現代数学講座　　東京大学
「面積と体積」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　今野 宏　　2007 年 7 月 21 日

「いろいろな図形の面積」

1　はじめに

面積、体積について、今日と来週で 6 つの講義が行われます。この講義では、その手始めとして、実際にいくつかの具体的な図形について、その面積を求めてみます。皆さんは、すでに「公式」としていろいろな図形の面積について学んでいることと思いますが、もう一度その公式がなぜ成立するかを考えてみましょう。出発点は、

$$(\text{長方形の面積}) = (\text{縦の長さ}) \times (\text{横の長さ})$$

です。この式をもとにして、

$$(\text{平行四辺形の面積}) = (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

$$(\text{三角形の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

が導かれます。

また、相似な図形において、対応する辺などの長さの比を相似比と呼びましたが、相似比が $a : b$ であるとき、面積比は $a^2 : b^2$ となります。

長方形、平行四辺形、三角形はいずれも直線によって囲まれた図形なので、面積が容易に求められました。それでは、曲線によって囲まれた図形の面積はどのようにして求めればよいでしょうか。そのためには、面積を求めたい図形を、面積がわかる図形で近似して、その近似の精度を上げていけばよいのです。また、近似の精度を上げるには、面積を求めたい図形を小さな図形に分割して、その小さな図形ごとに近似をすればよいのです。この考え方を用いて、曲線に囲まれた図形の面積を求めてみましょう。

2　円の面積 (1)

この章では、よく知られた公式

$$(\text{半径 } r \text{ の円の面積}) = \pi r^2$$

が成り立つ理由を考えましょう。

まず、円周率 π の定義を思い出しましょう。円周率 π とは、半径 1 の円周の長さの半分です。すなわち、半径 1 の円周の長さは 2π です。したがって、半径 r の円周の長さは $2\pi r$ となります。

半径 r の円の面積 $S(r)$ を求めましょう。自然数 n を固定して、この円と中心が同じで、半径 $\frac{kr}{n}$ の円周を C_k $(k = 1, 2, \dots n)$ とします。さらに

$$S_k = \begin{cases} C_1 \text{ に囲まれた部分の面積} & k = 1 \text{ のとき} \\ C_{k-1} \text{ と } C_k \text{ に囲まれた部分の面積} & k = 2, 3, \dots, n \text{ のとき} \end{cases}$$

とします。このとき C_{k-1} の長さは $2\pi\frac{(k-1)r}{n}$ 、C_k の長さは $2\pi\frac{kr}{n}$ で、しかも、この 2 つの円の半径の差は $\frac{r}{n}$ ですから

$$2\pi\frac{(k-1)r}{n} \times \frac{r}{n} \leq S_k \leq 2\pi\frac{kr}{n} \times \frac{r}{n}$$

が成り立ちます。$S(r) = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ ですから

$$2\pi r^2 \frac{0 + 1 + \cdots + (n-1)}{n^2} \leq S(r) \leq 2\pi r^2 \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$$

となります。$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ に注意すると、

$$2\pi r^2 \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \leq S(r) \leq 2\pi r^2 \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

となります。したがって、任意の自然数 n について

$$\pi r^2 (1 - \frac{1}{n}) \leq S(r) \leq \pi r^2 (1 + \frac{1}{n})$$

となり、n を大きくすることにより、$S(r) = \pi r^2$ であることがわかります。これで円の面積の公式が証明されました。

3　円の面積 (2)

この章では、別のやり方で、半径 r の円の面積 $S(r)$ を求めてみましょう。以下では、議論の本質を明確にするために、$r=1$ の場合に説明します。一般の r の場合には、どのように議論を修正すべきかを考えてみてください。

P_n を半径 1 の円に内接する正 n 角形としましょう。円の中心と P_n の各頂点を線分で結ぶと、n 個の二等辺三角形ができます。この二等辺三角形を半分にすると、斜辺が 1、他の 2 辺が $\sin\frac{180^\circ}{n}$、$\cos\frac{180^\circ}{n}$ である直角三角形となります。このことから、

$$(P_n\text{の周の長さ}) = 2n \times \sin\frac{180^\circ}{n}$$
$$(P_n\text{の面積}) = n \times \sin\frac{180^\circ}{n} \times \cos\frac{180^\circ}{n}$$

がわかります。

一方 Q_n を半径 1 の円に外接する正 n 角形とするとき、P_n と Q_n の相似比は $\cos\frac{180^\circ}{n}$: 1 であることがわかります。したがって、

$$(Q_n\text{の面積}) = (P_n\text{の面積}) \times \left(\frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\right)^2 = n \times \sin\frac{180^\circ}{n} \times \frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

となります。

ここで $P_n \subset (\text{半径 1 の円}) \subset Q_n$ ですから、任意の n について

$$(P_n\text{の面積}) \leq S(1) \leq (Q_n\text{の面積}) \qquad (*)$$

となります。

ところで、$n \longrightarrow \infty$ のとき P_n の周の長さは半径 1 の円周の長さに限りなく近づいていきますから、

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき} \quad 2n \times \sin\frac{180^\circ}{n} \longrightarrow 2\pi$$

となります。さらに $n \longrightarrow \infty$ のとき $\cos\frac{180^\circ}{n} \longrightarrow 1$ を用いると

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき} \quad (P_n\text{の面積}) = n \times \sin\frac{180^\circ}{n} \times \cos\frac{180^\circ}{n} \longrightarrow \pi$$
$$(Q_n\text{の面積}) = n \times \sin\frac{180^\circ}{n} \times \frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{n}} \longrightarrow \pi$$

となります。したがって、式 $(*)$ において $n \longrightarrow \infty$ とすれば $S(1) = \pi$ がわかります。

4　放物線と x 軸の間の面積

x 軸と放物線 $y=x^2$ と 直線 $x=a$ $(a \geq 0)$ に囲まれた部分を $U(a)$ とするとき、$U(a)$ の面積を求めてみましょう。

自然数 n を固定します。長方形の領域 V_k, W_k $(k=1,\ldots,n)$ を次のように定めます。

$$V_k = \{(x,y) \mid \frac{(k-1)a}{n} \leq x \leq \frac{ka}{n},\ 0 \leq y \leq (\frac{(k-1)a}{n})^2\}$$
$$W_k = \{(x,y) \mid \frac{(k-1)a}{n} \leq x \leq \frac{ka}{n},\ 0 \leq y \leq (\frac{ka}{n})^2\}$$

さらに $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n, \quad W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ とすると、$V \subset U(a) \subset W$ となります。したがって

$$(V \text{ の面積}) \leq (U(a) \text{ の面積}) \leq (W \text{ の面積})$$

となります。

$$(V_k \text{ の面積}) = \frac{a}{n} \times (\frac{(k-1)a}{n})^2, \quad (W_k \text{ の面積}) = \frac{a}{n} \times (\frac{ka}{n})^2$$

に注意すると

$$(V \text{ の面積}) = (V_1 \text{ の面積}) + (V_2 \text{ の面積}) + \cdots + (V_n \text{ の面積}) = \frac{a^3}{n^3}\{0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$
$$(W \text{ の面積}) = (W_1 \text{ の面積}) + (W_2 \text{ の面積}) + \cdots + (W_n \text{ の面積}) = \frac{a^3}{n^3}\{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}$$

となります。ここで、$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ に注意すると

$$\frac{a^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq (U(a) \text{ の面積}) \leq \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となります。このように、任意の自然数 n について

$$\frac{a^3}{3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{2n}) \leq (U(a) \text{ の面積}) \leq \frac{a^3}{3}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})$$

が成り立つので、$n \longrightarrow \infty$ とすれば $(U(a) \text{ の面積}) = \frac{a^3}{3}$ がわかります。

このように $U(a)$ の面積を求めるのに、まず $U(a)$ を $x = \frac{ka}{n}$ $(k=1,\ldots,n-1)$ で切って細長い図形に分割しました。そして、その細長い図形を長方形で近似して、その長方形の面積の和をとることにより、$U(a)$ の面積を近似しました。さらに、分割を限りなく細かくして、近似の精度を上げていくことにより、$U(a)$ の面積を求めることができました。２，３章で、円の面積を求めましたが、近似のしかたは異なっていても、基本的な考え方は同じです。この考え方は積分とよばれています。これが積分の本来の姿ですが、高校では、積分は少し違った形で導入され、上の考え方は区分求積法として解説されています。