高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「多角形と多面体」　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　坪井　俊　　　　　　　　　　　　　　　　　　2006 年 7 月 29 日

「オイラー数」

- **凸多面体**

　３次元ユークリッド空間にある図形 F が凸であるとは、F の任意の２点を結ぶ線分が、図形 F に含まれることである。

　３次元ユークリッド空間にある（有界な）図形 F が多面体であるとは、有限個の頂点、有限個の辺、有限個の面（および内部）からなるもので、頂点は３次元ユークリッド空間の点であり、辺は頂点を結ぶ有限個の線分からなる。面はユークリッド空間内の平面上にある多角形で、面の境界は辺と頂点からなる。それぞれの辺は、ちょうど２つの面の境界となっている。

多面体 F の頂点、辺、面および内部を合わせたものが、凸のとき、凸多面体と呼ぶ。

凸多面体の面は凸多角形が面となっている。

また、凸多角形は平面の片側の共通部分となっている。

つまり、凸多角形は、いくつかの空間ベクトル $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ と実数 $b_1, \ldots, b_k$ により、連立不等式 $\overrightarrow{a}_1 \bullet \overrightarrow{x} \leqq b_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k \bullet \overrightarrow{x} \leqq b_k$ により定義される図形である。$\bullet$ は内積を表す。

- **多面体の（表面の）オイラー数**

多面体のすべての面の境界が、つながった辺と頂点からなるとする。

このとき、（頂点の個数）－（辺の個数）＋（面の個数）を多面体の（表面の）オイラー数と呼ぶ。

- **オイラーの定理**

凸多面体の（表面の）オイラー数は２である。

頂点の個数を v, 辺の個数を e,　面の個数を f とすると $v - e + f = 2$

- **平面の多角形の分割**

平面の多角形の辺の個数と頂点の個数は等しい。

平面の多角形の分割について

多角形とは、辺がひとつながりになっている平面上の図形と定義する。

このとき、辺の個数と頂点の個数は等しい。

平面の多角形が、線分のあつまりによって多角形に分割されているとき、$v-e+f=1$ を辺の数についての数学的帰納法で示す。

分割される前の多角形について、面の数は１だから、上の式は成立している。

次の操作を考える。

「まず、２つの面をつなぐように辺を消去する。多角形の内側に突き出した辺と頂点を消去する。」

この操作が必ず出来ることを示せば、この操作で、$v-e+f$ の値は変わらないことと、辺の数が減ることから、数学的帰納法によって、上の式は成立している。

面の数が２以上ならば、隣合う面があるから辺の消去が可能である。

この結果、多角形の内側へ突き出した辺と頂点が出来たときは、辺と頂点を先から順に消去していく。

こうして、平面の多角形が、線分のあつまりによって多角形に分割されているとき、$v-e+f=1$ が示された。

- **オイラーの定理の証明**

凸多面体 K は、２つの平面の多角形 P_1 と P_2 に、裏と表が射影できる。裏と表の共通部分 C は P_1 と P_2 の境界に射影されている。

このとき

K の辺の数＝ P_1 の分割の辺の数＋ P_2 の分割の辺の数− C の辺の数

K の頂点の数＝ P_1 の分割の頂点の数＋ P_2 の分割の頂点の数− C の頂点の数

K の面の数＝ P_1 の分割の面の数＋ P_2 の分割の面の数

$$\begin{aligned} v(K)-e(K)+f(K) &= v(P_1)+v(P_2)-v(C) \\ &\quad -(e(P_1)+e(P_2)-e(C)) \\ &\quad +f(P_1)+f(P_2) \\ &= 1+1+e(C)-v(C) = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

- **正多面体の分類**

正多角形が面であり、各頂点に同じ個数の面が集まる多面体を正多面体と呼ぶ。

面が正 k 角形とすると、$2e=kf$ $(k \geqq 3)$

各頂点に m 個の面あるいは辺が集まるとすると、$vm=2e$ $(m \geqq 3)$

オイラーの定理から $v-e+f=2$ である。

従って $(\dfrac{2}{m}-1+\dfrac{2}{k})e=2$

これから、$\dfrac{2}{m}-1+\dfrac{2}{k}>0$, すなわち $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{k}>\dfrac{1}{2}$

これを満たす (k,m) $(k,m \geqq 3)$ は、$(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$ に限る。

このとき、(v,e,f) は、それぞれ、$(4,6,4)$, $(6,12,8)$, $(12,30,20)$, $(8,12,6)$, $(20,30,12)$ となり、これらは、正４面体、正８面体、正２０面体、正６面体、正１２面体に対応している。