

「正多面体」

この講義では、五種類の正多面体の個性と互いの関係を探ります。

1 正多面体の面，辺，頂点の個数を数える

正十二面体の面，辺，頂点の個数を実際に数えてみて，それから理論的に数えてみて，それらがちゃんと一致することを確認しましょう。同じものを求めるのに複数の方法を試みることは，間違いを防ぎ，正確に理解するためにとっても大切です。

1.1 模型を作る

実際に，正十二面体の模型をつかって，数えてみましょう。そのために，まずは展開図を作ることからはじめます。

用意するもの

- 薄手の白紙一枚と厚手の白紙（ケント紙）一枚
- 正五角形が描かれた厚手のカード一枚
- 鉛筆とはさみ

模型を作る手順

1. 厚手のカードから正五角形を丁寧に切り抜いて『正五角形定規』を作ります。
2. 正十二面体を見ながら『正五角形定規』を利用して，薄手の白紙の上に展開図を作ります。ここでは，そんなに丁寧に描く必要はありません。展開図ができて，切り抜かないでください。
3. 展開図ができたなら，各自で合わせをしましょう。できあがった展開図に従ってポリドロンをつなげます。それを曲げていって本当に正十二面体ができるかどうかを確かめます。うまく行かなかつたら，気を取り直して，もう一度展開図を作り直しましょう。
4. 確かに正十二面体の展開図になっていることを確認したら，再び『正五角形定規』を用いて，全く同じ展開図をケント紙に写します。今度はできるだけ丁寧に描きましょう。
5. 写した展開図を丁寧に切り抜いて，組み立てましょう。

今回の展開図にはのりしろがないので，きれいにくっつけて模型を完成させることができませんが，家に帰ってからセロテープで辺をくっつけて模型を完成させましょう。

1.2 実際に数える

展開図を組み立てて作った模型を利用して，面，辺，頂点の個数を数えましょう。

例えば，模型にシールを貼って行き，必要となるシールの個数を数えるのがやり方としては簡単なのですが，今回は別のやり方をすることにします。今回のやり方には，数えた手順を記録に残すことができるという利点があります。あとで参照できるように記録を残すということは，科学に取り組む上でとても大切なことです。

面の個数を数える

6. 切り抜いた展開図の各正五角形の真ん中に 1 から順に番号を書き込み、数字を で囲んでください。書き込む正五角形の順序はいつでも構いません。

正十二面体を作ったのだから、答は 12 になるに決まっていると思うでしょう。もちろんそうでなくては困ります。しかし、正六面体の場合だったら『立方体』という別名があり、この別名には 6 という数字はどこにもでてきませんから、立方体の面の個数を数えることは、無意味ではありません。正十二面体の場合は、そのような別名がないだけのことで、正十二面体の面の個数を数えることも決して無意味なことではないのです。

辺の個数を数える

7. 切り抜いた展開図の『端』でない辺（つまり折り目のある辺）の中点付近に小さく 1 から順に番号を書き込んでいきましょう。
8. 引き続き、切り抜いた展開図の『端』である辺の中点付近にも順に番号を小さく書き込み、同時にその辺と接着されることになる辺にも同じ番号を小さく書き込んでいきます。
9. 番号を数えて、辺の個数を求めましょう。

頂点の個数を数える

10. 同じように工夫して、頂点の個数を数えましょう。

数字を書き込んでいくと、既に書き込んだ辺の番号と紛らわしいので、例えば a,b,c,d,... とアルファベットを書き込むと良いでしょう。

1.3 理論的に数える

実際にどうやって数えたかを反省してみると、例えば辺の個数を数える際に、実際に数字を書き込むという面倒なことはしなくても答が分かることに気づくかもしれません。面の個数が 12 個であることは既に確認したものとして、思考によって辺の個数と頂点の個数を求めてみましょう。

2 正多面体の双対性を調べる

同じように他の多面体の面、辺、頂点の個数を調べて比較してみると、いろいろと気づくことがあります。その意味を考えてみましょう。

3 正多面体の対称性を数える

『対称性』という言葉は、ある種の性質を言い表すものですので、それを数えるというのは、日本語の言葉の使い方として正確ではありません。ここでは『自分自身と形状が重なるように動かすやり方』の個数という意味に受け取ってください。

さて、テーブルに白紙を置き、そこに正十二面体の一つの面と同じ大きさの正五角形を描きます。そして、正十二面体の番号 1 の面をそこにぴったり合わせ、静止させたとします。次に、正十二面体を持ち上げて、好きなように動かし、再びテーブルの白紙の上に静止させたとします。もとの通りに置く必要はありませんが、正十二面体のどれかの面がはじめに描いた正五角形にぴったり合っているようにするものとします。

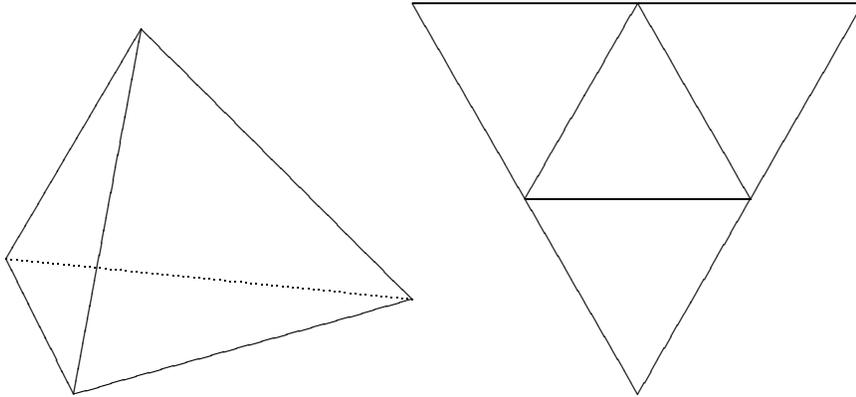
このようにして、はじめに置いた状態と、動かしてから置き直した状態を比較してみます。すると、もとの状態に戻っていることもあるし、別の状態になっていることもあります。ここで、別の状態というのは、12 個の面に振った 1 から 12 までの番号の空間における配置がもとの配置と異なっていることを意味するものとします。

さて、このように考えたとき、互いに異なる状態は果たして何通りあるでしょうか？

正多面体の透視図と展開図

1 正四面体

概形透視図と展開図の例

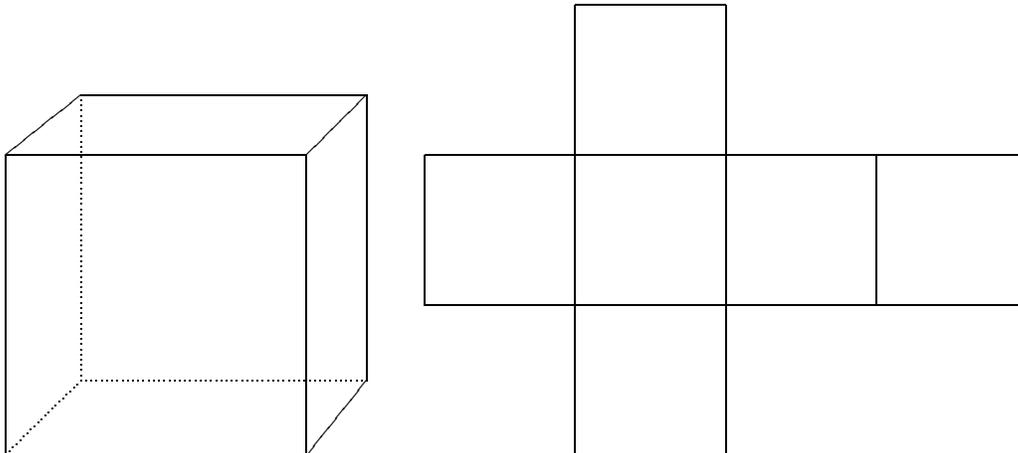


データ

頂点の個数 = 個, 辺の個数 = 個, 面の個数 = 個

2 正六面体

概形透視図と展開図の例

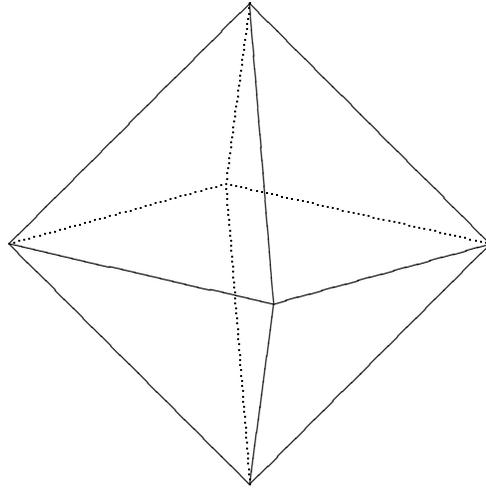


データ

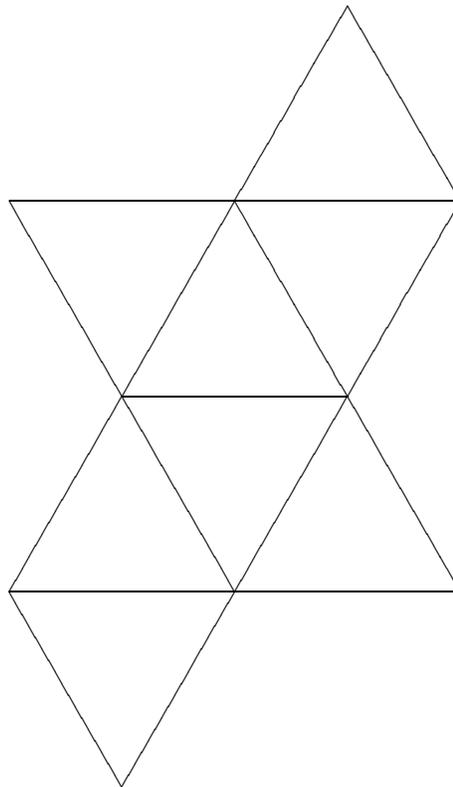
頂点の個数 = 個, 辺の個数 = 個, 面の個数 = 個

3 正八面体

概形透視図



展開図の例

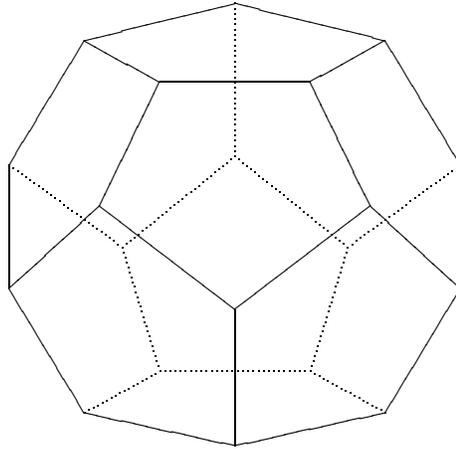


データ

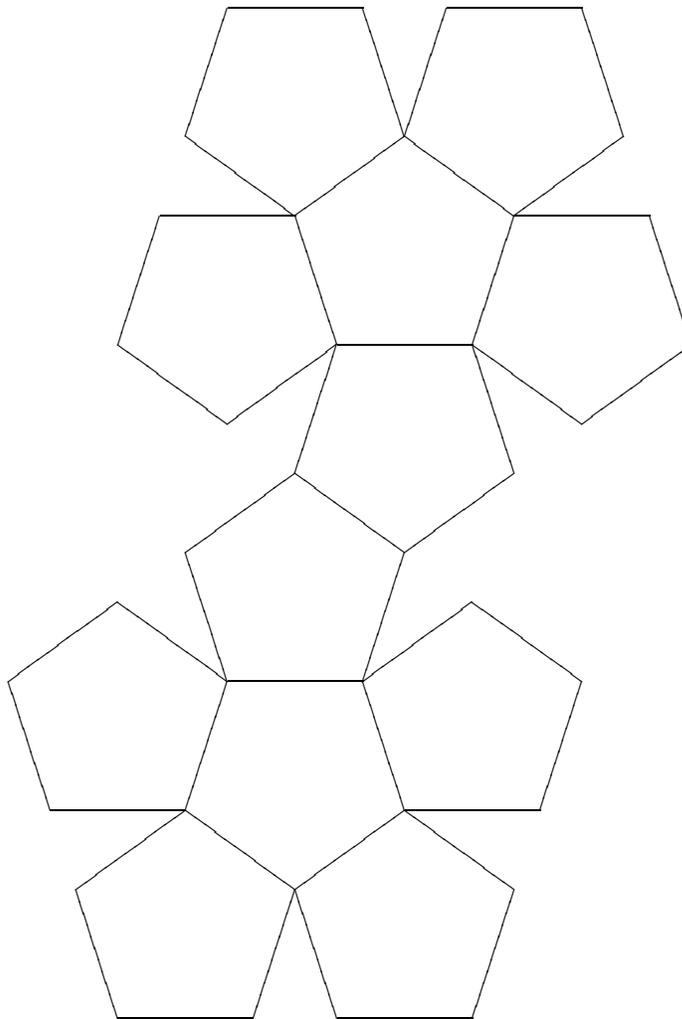
頂点の個数 = 個 , 辺の個数 = 個 , 面の個数 = 個

4 正十二面体

概形透視図



展開図の例

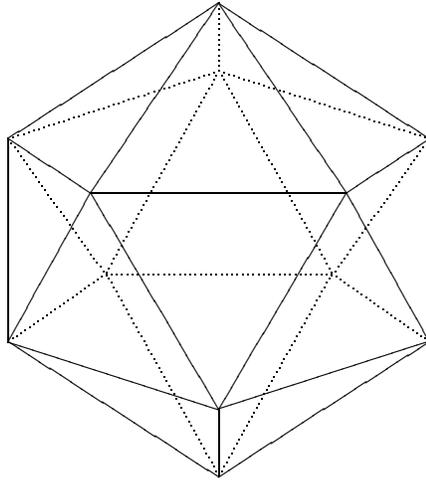


データ

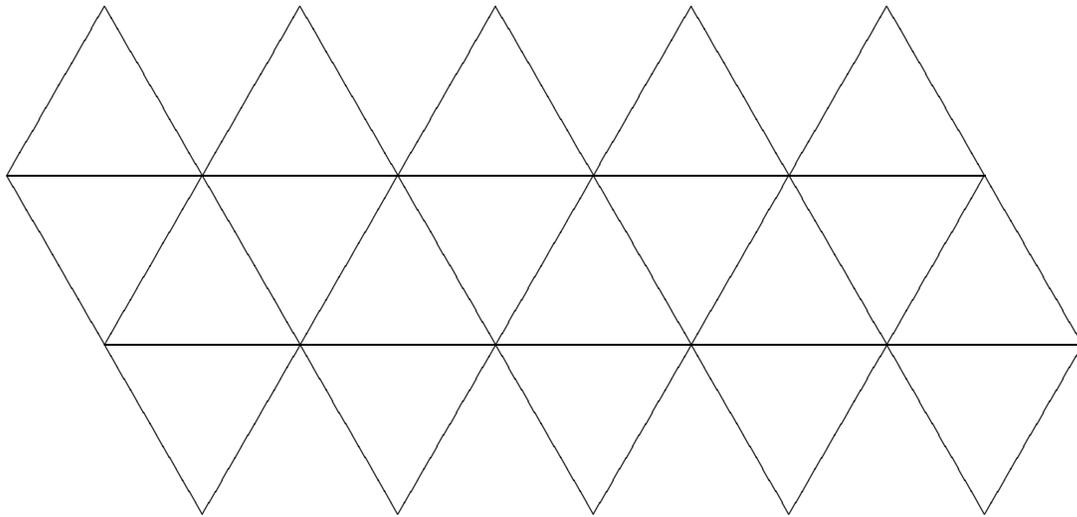
頂点の個数 = 個 , 辺の個数 = 個 , 面の個数 = 個

5 正二十面体

概形透視図



展開図の例



データ

頂点の個数 = 個 , 辺の個数 = 個 , 面の個数 = 個

