高校生のための現代数学講　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「多角形と多面体　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義（1）　森田　茂之　　　　　　　　　　　　　　　　　2006 年 7 月 29 日

「多角形の曲率」

xyz-空間の中の，交わる２つの平面 H, H' のなす角の定義：

交わる２平面 H と H' の共通部分は，一つの直線 ℓ である．ℓ 上に１点 P をとり，P において ℓ と直交する平面を K とする．このとき H と K の共通部分を m，H' と K の共通部分を m' とすれば，m, m' はどちらも平面 K 上の直線で，P において交わる．そこでこの２直線 m, m' のなす角をもって，２平面 H, H' のなす角と定義する．

単位球面：

xyz-空間の中で，原点からの距離が１の点全体のなす図形を，**単位球面**という．これを S^2 と表すことにする．単位球面の表面積は 4π である．一般に，半径が r の球面の表面積は $4\pi r^2$ である．

大円：

球面の中心を通る平面と球面との共通部分を,（その球面の）**大円**という．とくに，xyz-空間の原点を通る平面と単位球面との共通部分を（単位球面の）**大円**という．例えば，赤道や経線は大円である．２つの異なる大円は，必ず２点で交わる．２つの異なる大円がそれぞれ乗っている交わる２平面のなす角を，それらの２つの大円のなす角と定義する．

球面３角形：

単位球面上で，３つの大円で囲まれた（曲がった）３角形を**球面３角形**という．例えば，北半球において２つの経線と赤道で囲まれた区域は 球面３角形である．球面３角形の各頂点は，２つの大円の交点の一つであるが，それらの大円の成す角を，その頂点における球面３角形の（内）角という．

球面３角形の面積の公式：

球面３角形 $\triangle$ の３頂点における内角をそれぞれ α, β, γ とすれば

$$\triangle \text{ の面積} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

となる．

多面体の各頂点における“とんがり度”の総和：

T を多面体とする．例えば，正４面体や正６面体（立方体）などを思い浮かべよう．多面体 T の各頂点 V において，V に集まる各面の V における内角の総和を考え，

$$\text{とんがり}\,(V) = 2\pi - V\text{ に集まる各面の }V\text{ における内角の総和}$$

を，多面体 T の V における **“とんがり度”** と呼ぶことにする．T が正４面体の場合には，各頂点に正３角形が３個集まるので，とんがり度は

$$2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$$

となる．一方，正４面体には４つの頂点があるので

$$\text{正 4 面体のとんがり度の総和} = 4 \times \pi = 4\pi$$

となる．つぎに，正６面体の場合を考えよう．この場合，各頂点には正４角形が３個集まるので，とんがり度は

$$2\pi - 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

となる．一方，正６面体には８つの頂点があるので

$$\text{正 6 面体のとんがり度の総和} = 8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$$

となる．結局，正４面体も正６面体もとんがり度の総和は 4π となり，等しくなる．これは偶然だろうか？この講義では，この疑問に答えることを目標とする．