高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「多角形と多面体」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　松本　幸夫　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2006 年 7 月 22 日

「平面のタイル張り」

• お風呂場などで見かけるように，平面に正方形を敷き詰めることができる．このことを簡単に,「平面は正方形でタイル張りできる」という．同じように，平面は正 3 角形でも，正 6 角形でもタイル張りできる．しかし，正 5 角形ではタイル張りできない.（パンフレット参照.）

• 上の 3 種類のタイル張り（正方形によるもの，正 3 角形によるもの，正 6 角形によるもの）には，ある法則が隠れている．それを探るため，次のことを思い出そう：
3 角形の内角の和は 180° である．一般に，n 角形の内角の和は

$$(n-2)\times 180^\circ$$

に等しい．このことは，任意の n 角形は対角線によって $n-2$ 個の 3 角形に分割されることからわかる．

• 正 n 角形の一つの角は

$$\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = \left(1-\frac{2}{n}\right)\times 180^\circ$$

である．

• 正 n 角形による平面のタイル張りで，一つの頂点のまわりに正 n 角形が p 個あるとすると，1 点のまわりは 360° だから

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\times 180^\circ \times p = 360^\circ$$

が成り立つ．両辺を 180° で割って

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\times p = 2$$

すなわち，

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$$

これを成り立たせる n と p の組 (n,p) は $(3,6)$，$(4,4)$，$(6,3)$ しかない．

• もっと一般に，何種類かの正多角形を混ぜて作ったタイル張りのことを**アルキメデスのタイル張り**という．前ページの 3 種類のタイル張り以外に，8 種類のアルキメデスのタイル張りがある.（17 世紀の学者ケプラーの発見）

• 下の図は正方形と正 3 角形を使った例で，$4-3-4-3-3$ という記号で表されるアルキメデスのタイル張りである．記号の意味は，どの頂点のまわりにも正方形（記号 4）と正 3 角形（記号 3）がこの順序で円く並んでいるということである．

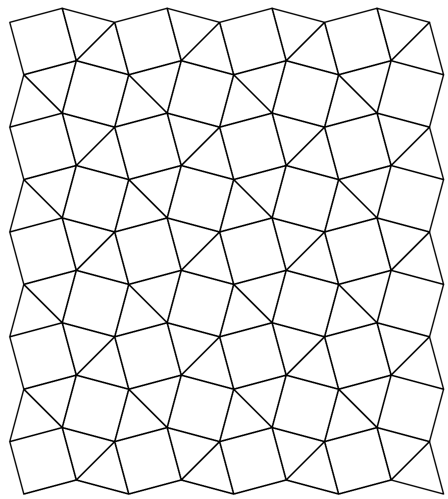

Figure 1: アルキメデスのタイル張り $4-3-4-3-3$

• 正方形 2 個と正 3 角形 3 個を使ったタイル張りでも，$4-4-3-3-3$ は上とは違うタイプのアルキメデスのタイル張りである．この絵を描いてみよう．

• 8 種類のアルキメデスのタイル張りは次の通りである：

$$4-3-4-3-3,\ \ 4-4-3-3-3,\ \ 6-3-6-3,\ \ 6-3-3-3-3,$$
$$6-4-3-4,\ \ 8-8-4,\ \ 12-6-4,\ \ 12-3-12.$$

• **見つけ方．** $n_1-n_2-\cdots-n_p$ というタイプのアルキメデスのタイル張りがあるとすると，頂点のまわりの角度が 360° ということから，

$$\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{2}{n_p}\right)=2$$

が成り立つ．この式が成り立つような整数の組 $(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ を探せばよい．（ただし，$n_i \geqq 3$.）求めた $n_1,,n_2,\ldots,n_p$ をいろいろの順序に並べてみて，実際にタイル張りに対応するかどうか調べる．

• 上の式を満たす解 $(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ でも，実際にタイル張りに対応するかどうかわからない．例えば，解 $(5,5,10)$ はタイル張りに対応していない．

• **ペンローズのタイル張り．**

高校生のための現代数学講座
「多角形と多面体」
講義付録　松本　幸夫

東京大学
玉原国際セミナーハウス
2006 年 7 月 22 日

「アルキメデスのタイル張り」

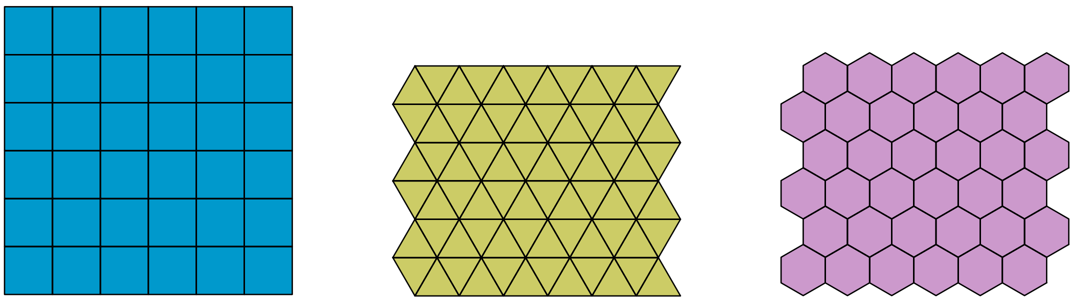

Figure 1. 左図は $(4-4-4-4)$，中央は $(3-3-3-3-3-3)$，右図は $(6-6-6)$

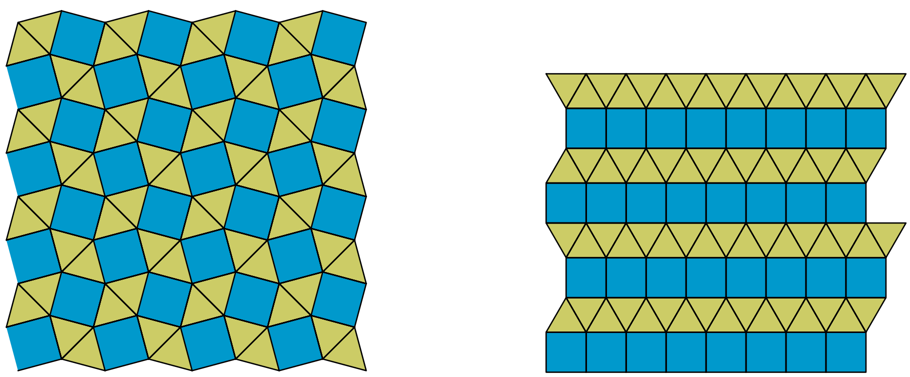

Figure 2. 左図は $(4-3-4-3-3)$，右図は $(4-4-3-3-3)$

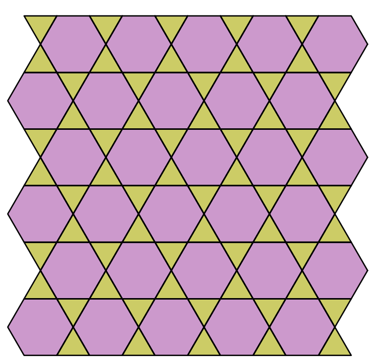

Figure 3. $(6-3-6-3)$

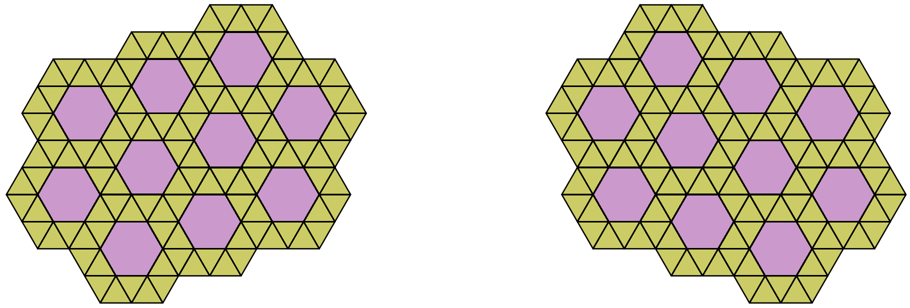

Figure 4. 左図が左手型の $(6-3-3-3-3)$，右図が右手型の $(6-3-3-3-3)$

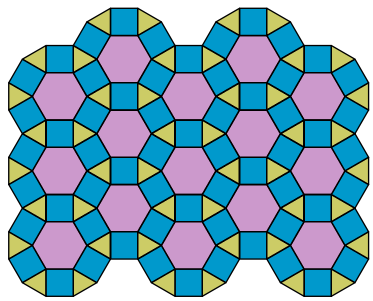

Figure 5. $(6-4-3-4)$

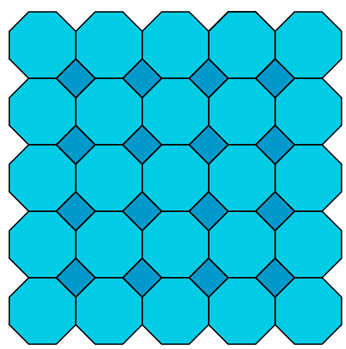

Figure 6. $(8-8-4)$

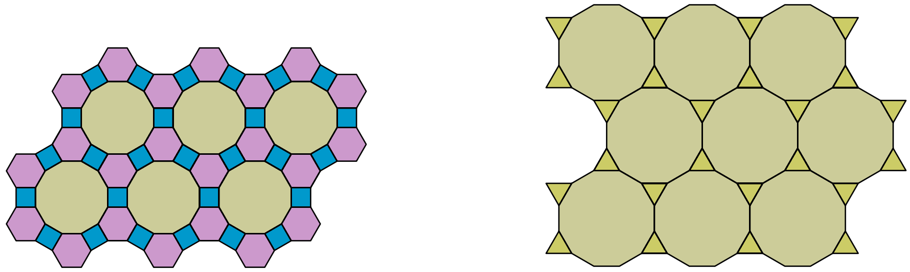

Figure 7. 左図が $(12-6-4)$，右図が $(12-12-3)$