高校生のための現代数学講座 東京大学
「多角形と多面体」 玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　坪井　俊 2006 年 7 月 22 日

「面積と比例」

- **２つの線分の長さの比較**

長さが等しくない線分の長さは、一方が長いか、短いかである。

$AB > A'B'$ とは、線分 AB の中に $A'B'$ をとれるという意味である．

「$=, >, <$ のどれかが成立する」という公理は、「$AB > A'B' > A"B"$ ならば $AB > A"B"$」という公理、「直線の上に、線分と同じ長さをとることが出来る」という公理と相俟って意味が深い。

- **２つの線分の長さの比**

２つの線分が与えられたときに、その比を求める手順はどういうものであろうか？

同じ直線上に線分を取って $AB > A'B'$ がわかったとする．$A = A'$ にとってもよい。

このあと、$AB - AB'$ という線分 $B'B$ と $A'B'$ をくらべる．

もう一度 $B'B > A'B'$ ならば、A' を B' の場所にとって、$A'B' = B'B"$ とし

$B'B - B'B" = B"B$ を得る．再び、$B"B$ と $A'B'$ を比べる．

何回か後に、残った長さが $A'B'$ より短くなるまで続ける．

- **アルキメデスの公理**

ここで問題だが、必ず何回か後に「残った長さが $A'B'$ より短くなる」のであろうか？

このことを真剣に考えたギリシャの数学者は、これは公理にせざるを得ないという結論に達した。

これを「アルキメデスの公理」と呼ぶ。

「アルキメデスの公理」は通常、どのような正の数　a, b　に対しても、ある自然数 n で　$an > b$　となるものがあるという形で述べられる。

$a = AB,\ b = A'B'$ に対して、n は「残った長さが残った長さが $A'B'$ より短くなる」その次の自然数である。

- **２つの線分の長さの比（続き）**

アルキメデスの公理の下で、$AB > A'B'$ のとき、$AB = nA'B' + A"B"$ ととって、$A"B"$ が存在しない（＝０）か、または $A'B' > A"B"$ となる。あとの場合、$A'B' > A"B"$ に対して同様に繰り返す。これが、**ユークリッドの互除法**である。

次の問題はこうして $AB > A'B' > A"B" >$ と取られた長さが何回目かに $= 0$ となるかどうかである。

「何回もやっていけば長さはどんどん短くなるから０になるだろう。」

という文章は、どのように解釈すればよいであろうか？

可能性としては、「何回目かに $=0$ となる」かまたは「何回やっても $=0$ とならない。」のどちらも可能である。

「何回目かに $=0$ となる」の場合、比は、自然数の比となる。そこでこれを**有理比**という。

そうでない場合があるか？すなわちそのような比が存在するかという問題が、ギリシャの数学者達を悩ませた。

- **無理比あるいは無理数の比**

  このようなものがあることは正方形の対角線の長さなどを考えればわかる。

- **比を比べる**

  $AB:CD = A'B':C'D'$ であることはどのようにしてわかるであろうか。

  比をユークリッドの互除法で考えなければいけないものであるとすると、これは非常な難問である。

  しかし、ユークリッドはそのようには議論していない。

  http://mis.edu.yamaguchi-u.ac.jp/kyoukan/watanabe/elements/hyoushi/

  「原論」第６巻命題２（面積）を使う。

  面積が定義され、長方形の面積は、直角をはさむ辺の長さの積に比例することを認める。これにより、平行線と比の関係が導かれる。

- **命題。**

  同じ底辺 AB をもつ同じ側にある２つの三角形 ABC, ABC' の面積が等しいことと CC' と AB が平行であることは同値である。

  （$\Longleftarrow$ を示すには、平行四辺形を作る。$\Longrightarrow$ は背理法。）

- **命題。**

  角 A を共有する三角形 ABC, $AB'C'$ について、BC と $B'C'$ が平行であることと $\triangle ABC'$ の面積と $\triangle AB'C$ の面積が等しいことは同値である。

- **命題。**

  角 A を共有する三角形 ABC, $AB'C'$ について、BC と $B'C'$ が平行であることと $AB:BB' = AC:CC'$ は同値。

  高さの等しい三角形の面積は、底辺の長さに比例するからである。

- **分解合同**

  面積が等しい２つ多角形 P, Q は、それぞれを同じ個数の多角形に分割し、$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$, $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k$ として、$P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2$, $\ldots$, $P_k \cong Q_k$ とすることができる。