人口の数学

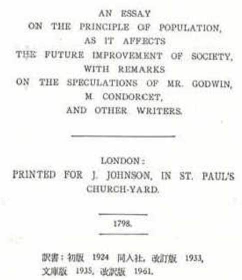
2017年度　玉原数学教室

東京大学大学院数理科学研究科　稲葉寿
2017年10月13日

生命や社会の問題と数学

- 数学（数理）モデルによって現象を記述して、その様子を研究するという数理科学の方法論は、物理や工学で大成功したが，生命や社会の問題を考えるうえでも有効であることがわかってきた．
- 現在では、計算能力が非常に高まってきているために、複雑なモデルも数値的に取り扱えるようになってきている。数学という言語であつかえる現象は非常にひろがってきている。
- 人口（ヒトの数と分布）の増え方，変化の法則を考えてみよう．

マルサスの「人口論」


AN ESSAY
ON THE PRINCIPLE OF POPULATION,
AS IT AFFECTS
THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY,
WITH REMARKS
ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,
M. CONDORCET,
AND OTHER WRITERS.

LONDON:
PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S
CHURCH-YARD.

1798.

訳書：初版 1924 同人社，改訂版 1933，
文庫版 1935，改訳版 1961.

3　最も簡単な生命・社会法則：人口（個体群）増加のマルサス法則

マルサス(Malthus)の法則

- P(n)=時刻nにおける人口数，r=年間成長率

$$P(n+1) = (1+r)P(n)$$

$$r = \frac{P(n+1) - P(n)}{P(n)}$$

$$P(n) = (1+r)^n P(0)$$

- 人口は幾何級数的に増える！

等差数列と等比数列

- 等差数列（算術的）

$$Q(n+1) = Q(n) + A$$

$$Q(n) = Q(0) + (n-1)A = (Q(0) - A) + An$$

- 等比数列（幾何的）

$$P(n+1) = (1+r)P(n)$$

$$r = \frac{P(n+1) - P(n)}{P(n)}$$

$$P(n) = (1+r)^n P(0)$$

マルサスの主張

- 人口は等比数列的（幾何的）に増えるのに，資源・食料は等差数列的（算術的）にしか増えない．等比数列のほうが，はるかに増加速度が速い．
- だから一人あたりの資源はやがてへってきて，貧困や飢餓が蔓延してしまう．
- 環境を改善すると，人口増加がおきて，余剰資源を使ってしまうので，ふたたび一人あたりの資源の少ない状態に逆戻りするだろう（マルサスの罠）

マルサス法則の応用 成長率・利子率・倍増時間

- M＝t年後の元利合計、r=年利率

$$M = G(1+r)^t$$

- 半年複利の場合

$$M = G\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

- 瞬間複利の場合

$$M = \lim_{n\to\infty} G\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}rt} = Ge^{rt}$$

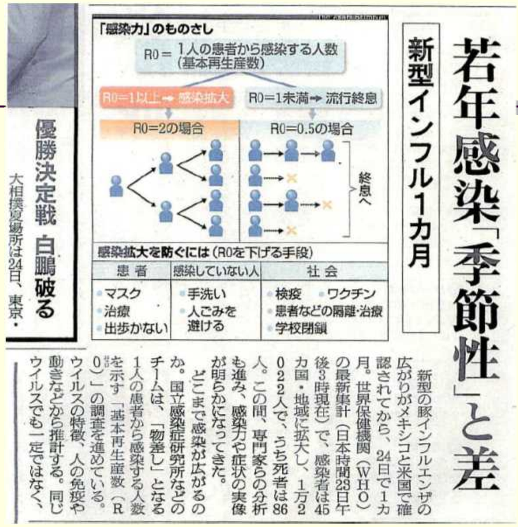
- 倍増時間T

$$2G = Ge^{rT} \Longleftrightarrow T = \frac{\log 2}{r} \approx \frac{69}{100r}$$

$$2G = G(1+r)^T \Longleftrightarrow T = \frac{\log 2}{\log(1+r)}$$

倍増時間とねずみ算

- 倍増時間の概算＝70の公式： パーセントで表示した単位時間あたりの増加率で70を割ると，その増加率で等比級数的に増えている人口やお金，物などが倍増するまでのおよその時間がわかる．ただし単位に注意．
- 等比数列はネズミ算＝一匹のネズミが子どもをうんでふえて，二匹になる．それがさらに4匹になる・・n回出産すると2のn乗（2をn回かけた数字）になる．でも二倍になるまでの時間を考えないと，どれだけ早く増加するかわからない．



若年感染「季節性」と差

新型インフル1カ月

「感染力」のものさし

R0＝1人の患者から感染する人数（基本再生産数）

R0＝1以上→感染拡大　R0＝1未満→流行終息

R0＝2の場合　R0＝0.5の場合

終息へ

感染拡大を防ぐには（R0を下げる手段）

患者	感染していない人	社会
・マスク ・治療 ・出歩かない	・手洗い ・人ごみを避ける	・検疫　・ワクチン ・患者などの隔離・治療 ・学校閉鎖

新型の豚インフルエンザの広がりがメキシコと米国で確認されてから、24日で1カ月。世界保健機関（ＷＨＯ）の最新集計（日本時間23日午後3時現在）で、感染者は45カ国・地域に拡大し、1万2022人で、うち死者は86人。この間、専門家らの分析も進み、感染力や症状の実像が明らかになってきた。

どこまで感染が広がるのか。国立感染症研究所などのチームは、「物差し」となる1人の患者から感染する人数を示す「基本再生産数（R0）」の調査を進めている。ウイルスの特徴、人の免疫や動きなどから推計する。同じウイルスでも一定ではなく、

優勝決定戦　白鵬破る

大相撲夏場所は24日、東京・

年齢構造

- 人には年齢がある.
- 年齢によって，子どもの産み方や死亡する確率は大きく異なる.
- そうした事情を考慮したら，ヒトの増え方はどう記述されるだろうか？
- 人口は，ある時点でみると多数の異なった世代の和である．そうしたとき，マルサスの法則はどうしてでてくるのか？（一年生草本のような植物と比較するとずいぶんちがう）

最古の人口数理モデル at 1202：

フィボナッチ(Fibonacci)のウサギ

- 雌雄ウサギひとつがいを単位として数え、死亡を無視して、出生から2ヶ月目に成熟してから毎月ひとつがいの子ウサギを生むと仮定
- Pn=n月目のウサギの総個体数はどうなるか？

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$$

$$P_1 = P_2 = 1$$

x を実数として，$P_n = x^n$ と仮定して代入すると，

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

となるから，x^{n-1} で割れば，

$$x^2 = x + 1$$

よって

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

この二つの根を α, β とおくと，一般に c_1, c_2 を実数として

$$P_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

が漸化式を満たしている．そこで，$P_1 = P_2 = 1$ とすれば

$$P_1 = c_1\alpha + c_2\beta = 1$$
$$P_2 = c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 = 1$$

という連立方程式になる．これを c_1, c_2 について解けば，

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

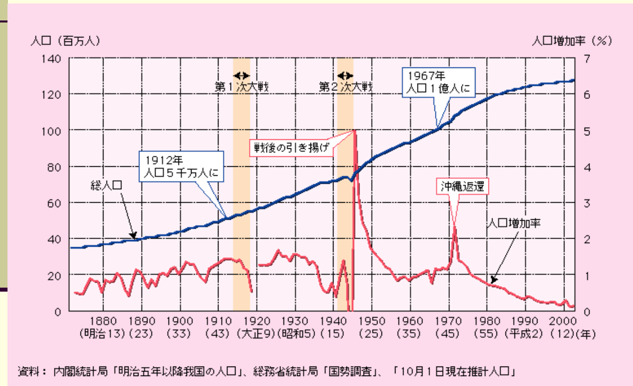
年齢があっても時間がたつとマルサス法則がでてくる！

$$\epsilon = \frac{\beta}{\alpha}, \quad |\epsilon| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$$

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n(1-\epsilon^n) \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(1+r)^n$$

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

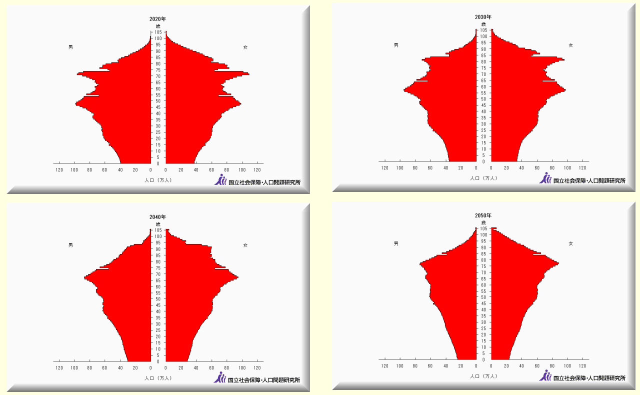
日本の人口成長



http://www8.cao.go.jp/shoushi/whitepaper
/w-2004/html-h/html/g1110040.html

日本の総人口の推移（平成29年9月）

日本の人口問題の深刻さ



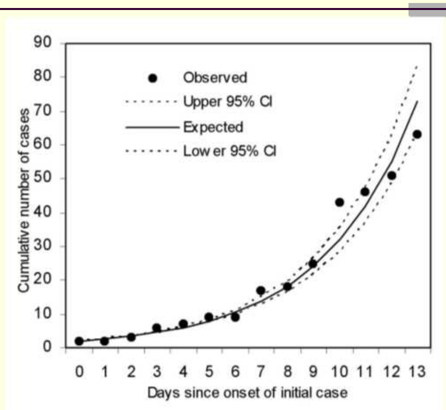
感染症の数理モデル

- 数理疫学の起源は18世紀のダニエル・ベルヌーイによる天然痘死亡率の寿命への影響に関する研究に遡る。
- 数理モデルによる流行現象の解明と制御方策の研究は、理論的に興味深いだけでなく、社会的意義も大きい。欧米では非常に厚い研究の蓄積があるが、日本の研究体制は非常に遅れているのが現状。

感染症の流行は現代社会最大のリスク要因

- 1918年のパンデミックインフルエンザ(スペイン風邪)は4000万以上の死者
- 2007年のHIV感染者は3320万、新規感染者250万、エイズによる死者210万
- マラリアは、全世界で年間に3億～5億人の患者、150万人～270万人の死者(90%はアフリカ熱帯地方)
- 新興感染症(SARS, BSE(vCJD),高病原性鳥インフルエンザなど)、再興感染症(結核、性的感染症、薬剤耐性の進化 etc.)などによって、感染症撲滅に関する1980年代までの楽観論は消滅。人口増加、都市集中、環境破壊などによって、感染症流行リスクはますます増大。

流行初期の感染人口のマルサス的成長の例1:(Spanish influenza in Maryland,1918)



流行曲線(SとI)の例:
ある寄宿学校のインフルエンザ in 1978

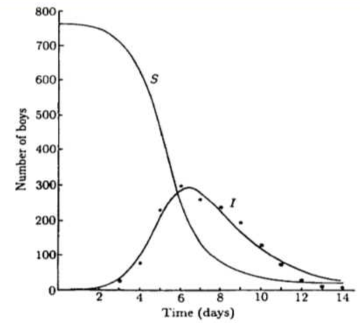


Figure 10.3. Influenza epidemic data (•) for a boys' boarding school as reported in the British medical journal, *The Lancet*, 4th March 1978. The continuous curves for the infectives (I) and susceptibles (S) were obtained from a best fit numerical solution of the SIR system (10.1)–(10.3): parameter values $N = 763$, $S_0 = 762$, $I = 1$, $\rho = 202$, $r = 2.18 \times 10^{-3}$/day. The conditions for an epidemic to occur, namely, $S_0 > \rho$, are clearly satisfied and the epidemic is severe since R/ρ is not small.

基本再生産数　R_0

- なんらかの病原体(ウイルスや細菌など)に対してすべてが感受性(susceptible)を有する個体からなるホスト(宿主)人口(個体群)集団において典型的な1人の感染者が、その全感染期間において再生産する2次感染者の期待数を基本再生産数(basic reproduction number)とよび、R_0で表す。

- 感染人口を世代毎にみて、1次(初期)感染者(primary cases)、2次感染者(secondary cases)、3次感染者等を継続的に考えた場合、R_0は等比級数的に変化する各世代の感染者サイズの公比である。

R_0の推定値例

表1　R_0 推定値

感染症	Nokes 他の推定	Fine の推定
麻疹	16 ～ 21	12 ～ 18
おたふく風邪	11 ～ 14	4 ～ 7
風疹	7 ～ 9	6 ～ 7
百日咳	16 ～ 21	12 ～ 17
ジフテリア	–	6 ～ 7
ポリオ	–	5 ～ 7
天然痘	–	5 ～ 7
水痘	–	8 ～ 10