中学生のための玉原数学教室　　　　　　　　　　　　　東京大学
玉原国際セミナーハウス

講義 (1)　植田　一石　　　　　　　　　　　　　　　2017 年 10 月 14 日

「無限の話」

1　数の概念

初等教育の最初の段階で習うので意識することは稀だが、数は高度に抽象的な概念である。数が同じという以外に共通点を持たない「ものの集まり」は多種多様であり、それだけ大きなものを捨象している。

2　数としての無限

ものを数えるのに使う 0, 1, 2, . . . という数を自然数という。明らかに自然数は無限にあるが、これらを全て集めたものを「数える」ことはできるのだろうか？素朴な答えは「無限大」だが、19 世紀のドイツ人数学者ゲオルク・カントールはこの問題を深く考えた。

3　ヒルベルトのホテル

カントールの考察を「最後の大数学者」ダフィット・ヒルベルトに従ってホテルにたとえて説明しよう。砂漠にたたずむ一つのホテルがあり、そこは常に満室なのだが、無限に部屋があって、0 号室、1 号室、2 号室、. . . と番号が付いている。いつ誰がそのホテルに行っても必ず泊まれるし、何人で行っても泊まることができる。無限人で連れ立って行っても良いし、それぞれに無限の人が乗ったバスが無限台来ても大丈夫だ。「自然数をぜんぶ集めたものの数」の事を $\aleph_0$ と書き、「アレフ・ゼロ」と呼ぶ。無限の足し算や掛け算は $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \cdots = \aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = 3\aleph_0 = \cdots = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \cdots = \aleph_0$ となるが、引き算や割り算をすることはできない。

4　ヒルベルトのホテルがあふれるとき

ヒルベルトのホテルは我々の素朴な直感に反し、無限の持つ深淵の入り口を我々に見せるが、カントールの真に驚くべき発見は、長さが 1 の線分の上にある点のそれぞれに客が一人いるような団体は、ヒルベルトのホテルに収まりきらないという事実だ。これを示すためにカントールは「対角線論法」を発明し、その後の数学や論理学に計り知れない影響を与えた。中でも、ゲーデルの不完全性定理や計算機プログラムの停止問題は有名である。

5　この世全ての本

「無限」を使えば、過去と未来の全ての本をまとめて一つの本にすることができる。この本のページ数は無限だが、この本を印刷する機械は容易に作ることができる。ただし、印刷を「終える」には無限の時間がかかるし、どこまで印刷したかを記憶し続けるために、常にメモリーを増設し続けなければならない。だが、どんな有限の本もこの本のどこかに入っているので、十分長い間待てば、やがては印刷されて出て来る。

さらに驚くべきことに、この世全ての本を印刷するのに、無限にメモリーを増設できるコンピューターは必要ない。ただ、でたらめにタイプライターを打つ猿が必要なだけである。この事実には “The infinite monkey theorem” というダサい名前が付いているが、「でたらめ」とは何かに関して、素朴な意味の無限よりも少し深い数学を使う。けれどもこれは別の物語、いつかまた、別のときに話すことにしよう。

6　平面を線で埋め尽くす

カントールは「平面上の点をすべて集めたものの大きさ」が「直線上の点をすべて集めたものの大きさ」と等しいことを発見したが、これを踏まえて、イタリア人数学者ジュゼッペ・ペアノが「線で平面を敷き詰める」方法を発見した。これは後にヒルベルトによって改良され、フラクタルの理論につながってゆく。

7　無限を超えた無限のそのまた先へ

「直線上の点をすべて集めたものの大きさ」は $2^{\aleph_0}$ と書かれる。さらに、$2^{2^{\aleph_0}}$ という「数」も定義できて、$2^{\aleph_0}$ よりも大きい事が対角線論法を用いて証明できる。この操作は繰り返せるので、どんな「無限」に対しても、それより大きな「無限」があることが分かる。

8　ポケットの中のビスケット

「選択公理」を使うことによって、一枚のビスケットをバラバラにして、それぞれのピースの形を変えることなく別の方法で組み立てることで、2 枚のビスケットにすることができる。これは極めて超越的かつ非構成的で、このピースを「理解する」ことは不可能だが、無限の持つ深淵の次の層を垣間見せている。けれどもこれは別の物語、いつかまた、別のときに話すことにしよう。