

「絡まりと引っかかきの幾何学」

1 絡まる, 引っかかるって何だろう

私たちの身の回りには絡み合っているもの, 引っかかっているものがたくさんあります。魚や昆虫を捕らえるときに用いる網, 錠前や吊り具 (フック) として使われる鎖など人々の活動の中で広く用いられているものもありますし, 水引 (みずひき) や注連縄 (しめなわ) など, 習慣や文化として取り入れられているものもあります。皆さんがいま着ている服も目を凝らしてみますと, 細かい糸が幾重にも絡まっている様子が観察できます。微小な世界を考えてみますと, 私たちの身体を構成している細胞の中にある DNA が二重らせんの構造を持つことはよく知られています。

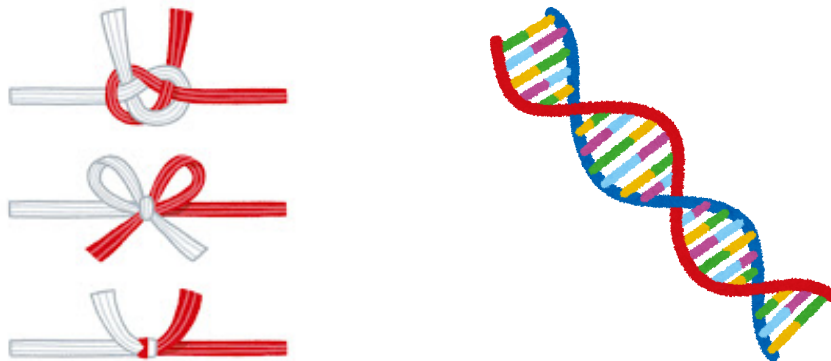


図1: (左) 水引の例 (右) DNA の二重らせん構造

絡まる, 引っかかるといった現象を『物体 (図形) の位置関係』と考えてみますと, この関係には大きさや素材はほとんど意味を持たないことに気がつきます。たとえば, 図2にあるような絡み目たちを 10cm の紐で作っても, 10 m の縄で作っても, 太い紐で作っても, 細い紐で作っても, (少し工夫して) ドーナツやプレッツェルで作っていても, 絡まっているという状況に本質的な違いはありません。

紐が絡まっている状況では, その紐を切らない限り, どんなに変形してみても決してほどけないときがあります。実は図2の絡み目たちはそのようなほどけない紐の例となっています。あれこれと変形している途中の様子を見てみますと, その変化は実に多彩です。

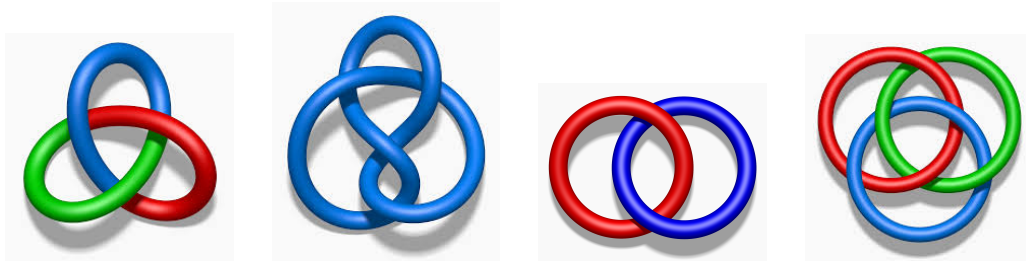


図 2: いろいろな絡み目たち

このような、見た目には千変万化するものの、本質的な位置関係は変わらないといった現象は数学的にどのように捉えればよいのでしょうか。数学において、図形の様子を調べる分野を『幾何学』と呼びます。皆さんもこれまでに学校での授業で平行線と角度の関係や、三角形の合同や相似、円の性質などを習った（これから習う？）と思いますが、それらも幾何学の一部です。そこでは、角度や長さといった量がとても重要な役割を果たしていました。一方で、実は、今回のように位置関係や繋がり方のみを対象とした幾何学も存在するのです。

今回の講義では、まず「絡まる」、「引っかかる」ということがどういうことなのかをいくつかの例で見てもらい、それから、そういった現象をどのように数学の言葉で表したらよいかを考えていきたいと思います。

2 平面における引っかかり

絡み方や引っかかり方を数学的に考えてみるとは言うものの、空間図形として立体的に考えるのは少し難しいので、まずは状況を簡単にして、似たような問題を考えてみましょう。

平原の真ん中に、柱が一本だけ立っている状況をイメージしてみてください。この平原は無限に広く、柱は無限に高いとします。そんな仮想的な平原にあなたは立っていて、長い紐の両端を持っているとします。いま、その場から動くことなくその紐を自分のもとにたぐり寄せることができるか、という問題を考えてみましょう。

容易に想像できますように、紐がどんなに長くても、柱に引っかかっている限りはたぐり寄せることができます。このことを数学的に説明しようと思います。まず、紐の高さのことを考える必要はなく、遥か上から眺めた平面図で考えればよいことに気がつきます。そこで xy 平面において原点 $O(0,0)$ に柱があるとし、点 $A(1,0)$ にあなたが立っているとします。このとき、あなたが両端を持っている紐は、図 3 のような点 A を出発して点 A に戻ってくるような、原点を通らない曲線として表すことができます。講義では、曲線が原点の周りに引っかかっているか否か、さらには何週分だけ引っかかっているかをどうやって調べたらよいかを紹介したいと思います。そして、その考え方が空間での絡まりや引っかかりを考えていくヒントとなるのです。

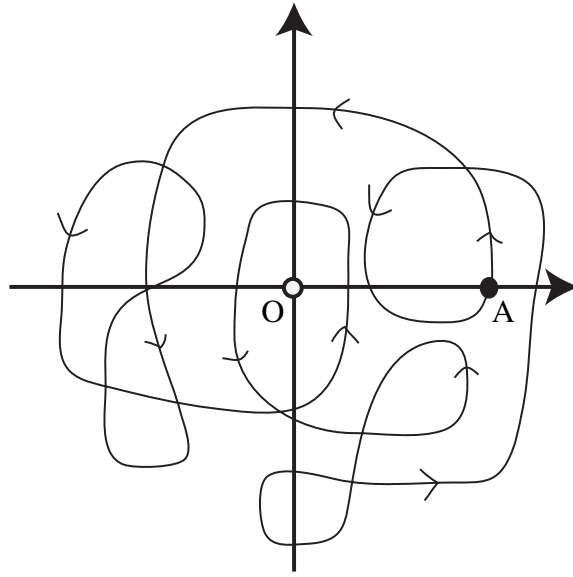


図 3: 平面内の曲線

3 トポロジー

以上のような位置関係や繋がり方に注目した幾何学は、19世紀の終わり頃にアンリ・ポアンカレ (Jules-Henri Poincaré, 1854–1912) というフランスの研究者によって創始された分野で、**トポロジー**と呼ばれています。日本語では**位相幾何学**と訳します。古代から続く数学の歴史の中では比較的若い分野と言えますが、20世紀において爆発的な発展を遂げ、現代数学の隅々にわたって、その考え方が用いられています。

以下に挙げるのは、今回の講義内容に興味を持って下さった方が、より深く勉強してみようというときに参考となる文献です。図書館や書店などで探してみてください。[1]は非常に読みやすい本だと思います。[2], [3]は少しレベルが高いですが、先生や友人の力を借りるなど、みんなで読んでみることで、いろいろなことが学べると思います。

参考文献

- [1] 村上 斉 著「新版 結び目のはなし」遊星社 (2015).
- [2] 河野 俊丈 著「新版 組みひもの数理」遊星社 (2009).
- [3] 砂田 利一 著「現代幾何学への道 — ユークリッドの蒔いた種」岩波書店 (2010).

図 1 は「いらすとや」 (<http://www.irasutoya.com>) から、図 2 は wikipedia から転載したものです。