中学生のための玉原数学教室　東京大学
玉原国際セミナーハウス
寺杣　友秀　2012 年 10 月 13 日

「３辺が整数の直角三角形を考える」

(1) 幾何学は古来エジプトのナイル川のはんらんの後に地面を測量する必要性があり、そこから始まったといわれています。その測量に欠くことができないのが、いかに簡単に直角を作り出すことでした。エジプト人たちは長さが３：４：５のロープ用いて三角形を作り、直角が簡単につくれることを知っていたそうです。（校庭に大きな直角をみんなで同じ長さの縄跳びを使って直角三角形を作るのは面白いかもしれません。）ピタゴラスは直角三角形があったとき、その斜辺の長さを c、その他の２辺の長さを a, b とするとき、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つことを示しました。これはピタゴラスの定理と呼ばれるもので、三平方の定理ともいわれています。

(2) この性質をみたす (a, b, c) として、他に $(5, 12, 13)$ というのがあり、これはバビロニアの人たちも知っていたといわれています。みなさんが中学で習う、（あるいは習った）平方根を使ってたとえば $(1, 2, \sqrt{5})$ という比を使っても直角三角形はできますが、簡単に $\sqrt{5}$ という比はなかなか作れません。３辺の比が整数の直角３角形があれば、このように、いろいろと便利なことがありますが、他に３辺の比が整数となる直角３角形はできるのでしょうか？測量のためだけならひとつあれば十分ですが、興味ある問題です。

(3) 実は（比が上のものとは違う）直角三角形は実際にあって、たとえば $(8, 15, 17)$, $(20, 21, 29)$, $(33, 56, 65)$ や、もうすこし大きいのであれば $(39, 80, 89)$ などです。実はこのように新しい比の直角三角形をつくるにはちょっと秘訣があります。このやり方さえ会得すれば、みなさんにもできます。

きみも、直角三角形マスターになれる。

今日はそれをみんなで作って、そこにひそむむ性質をのぞいてみようではありませんか。比を考えれば、三辺が分数となるような三角形で考えも良いことに注意しておく。そして…

(4) いろんな形の三角形ができたところで、斜辺に着目してみましょう。３辺は最

初に共通因数で割っておいてできるだけ簡単な比にしておこう。図を書いて考えると次のことがわかります。

定理 $(a,b,c),(a',b',c')$ をそれぞれ長さが整数の直角三角形とする。このとき長さが整数の直角三角形 (a'',b'',c'') でうえの二つの三角形と相似ではないものが作れる。

斜辺について着目したとき不正確な言い方をすれば、（相似ではないと仮定しても、）掛け算について閉じている、という性質があるということです。それではなるべく簡単な整数比にしたとき、斜辺 c の因数にはどのような性質があるのでしょうか？これを皆さんと研究してみたいと思います。

(5) それでは三平方の定理を少し変えて、

$$a^3+b^3=c^3$$

を満たす自然数 x,y,z の組はあるのでしょうか？ここで証明するのはちょっと難しいのですが、実は次の定理が示せます。

定理 うえの方程式を満たす自然数 (a,b,c) は存在しない。

このような問題について、古来ディオファントスという数学者が多くの研究を残しました。そのディオファントスの本の愛読者であったピエール・ド・フェルマーはもっとすごい定理

定理 n が 3 以上の自然数でも

$$a^n+b^n=c^n$$

を満たす自然数 (a,b,c) は存在しない。

を証明した、とディオファントスの本の余白に書き込みをしました。さらに続けて「しかしその証明はこの余白には書ききれない」と述べ証明は書かれませんでした。それが１６３７年のことです。その証明を埋めようと、多くの数学者がチャレンジしたのですが、多くの努力も虚しく、ずっと未解決問題とされていました。これはフェルマーの最終定理と呼ばれているものです。ところが、最近１９９５年ワイルズ（プリンストン大学）により解決されました。みなさん、みなさんが生きている同じ時代にフェルマーの最終定理が証明されるなんて、ほんとにすごいことなんですよ。