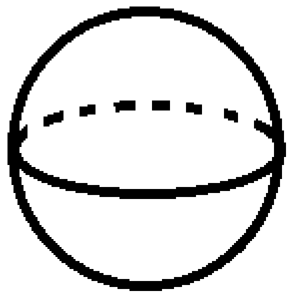
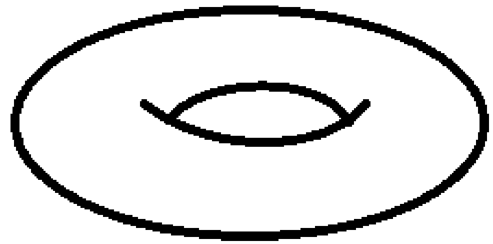
見える曲面，見えない曲面

沼田市中学生のための玉原数学教室
２０１２年１０月１３日
東京大学大学院数理科学研究科
今野　宏

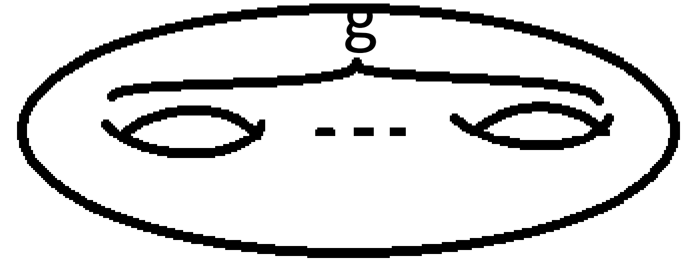
１. 曲面の例



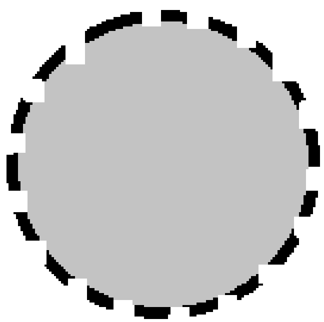
球面（球の表面）



トーラス
（ドーナツの表面）



種数ｇの閉曲面



２次元円板
（境界を含まない）

無限にのびた円柱

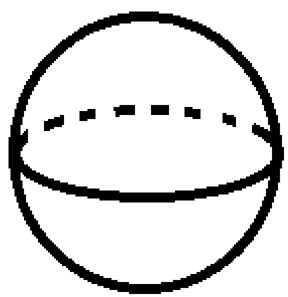
2. 曲面とは

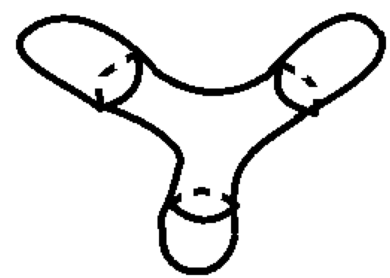
- 曲面とは各点で2次元の広がりを持った図形のことである。すなわち、曲面上のどの点の周りも2次元円板と同じである。
- 「有限の大きさ」を持つ曲面で、曲面上を動いていても外には出ないものを閉曲面という。
- 球面、トーラス、種数 g の閉曲面 は閉曲面
- 境界のない2次元円板、無限にのびた円柱は閉曲面ではない。

３．閉曲面の区別のしかた

曲面 X を伸び縮みさせることにより、
曲面 Y に変形することができるとき、
「曲面 X と曲面 Y は同じ」 であるという。(注)

（トポロジーの考え方）

X 

Y 

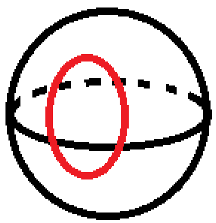
4.「異なる」曲面の例

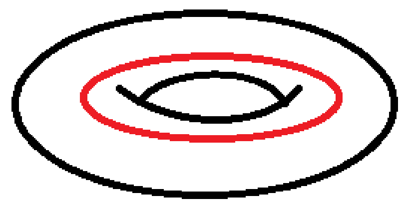
球面とトーラスは異なる曲面である。

（証明）

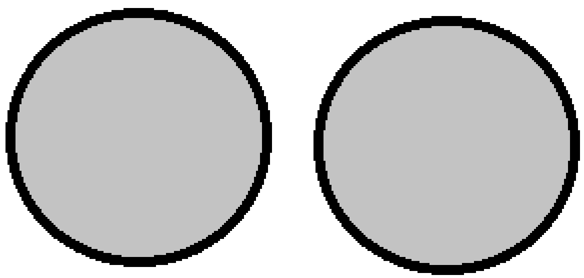
球面上の円周は、必ず球面上で1点につぶすことができる。

一方、トーラス上の円周で、トーラス上では1点につぶせないものがある。

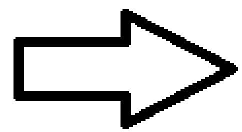




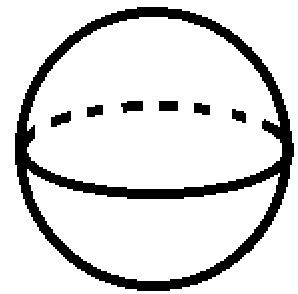
5. 閉曲面の作り方（1）



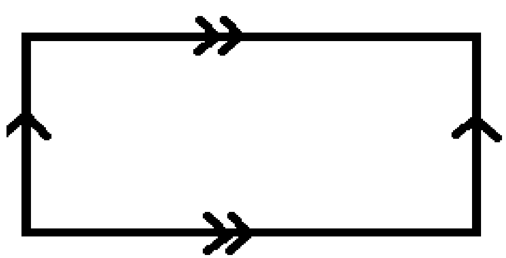
境界を持つ
2次元円板



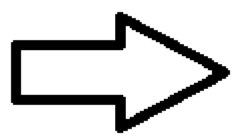
境界で
貼り合せる



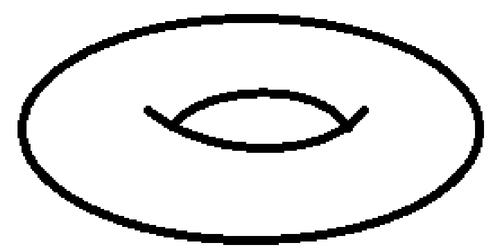
2次元球面



長方形

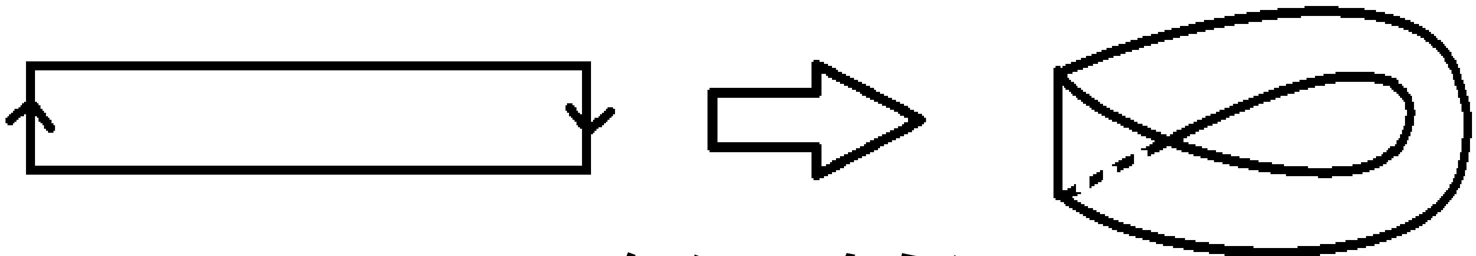


向かい合う辺
で貼り合せる



トーラス

６．メビウスの帯

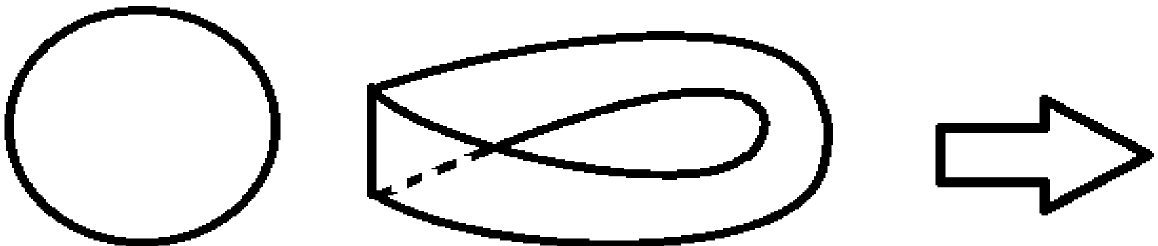


メビウスの帯の性質

１．円周を境界に持つ曲面である。

２．表裏の区別がない。

7．閉曲面の作り方（２）



射影空間

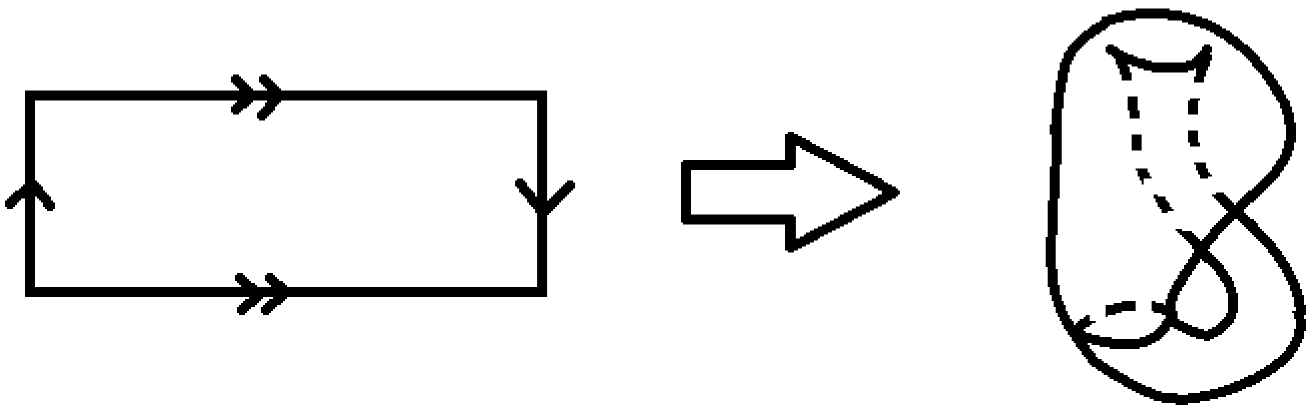
２次元円板　メビウスの帯　境界で貼り合せる

射影空間の性質

３次元ユークリッド空間に「入れる」ことができない。

射影空間は「見えない曲面」である。

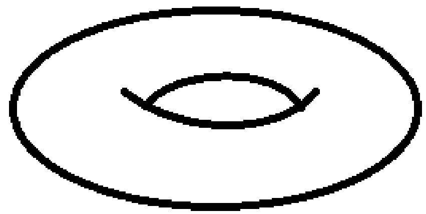
8. 閉曲面の作り方（3）



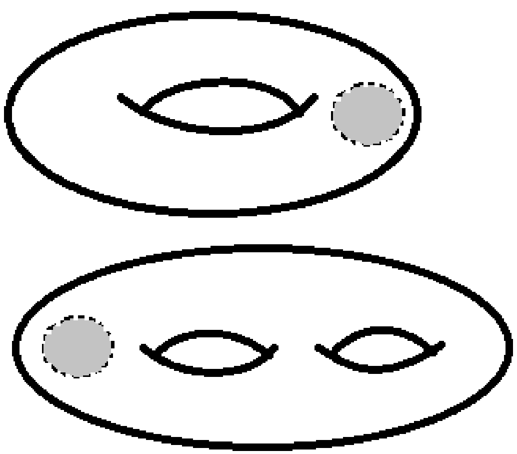
長方形　　向かい合う辺で貼り合せる　　クラインの壺

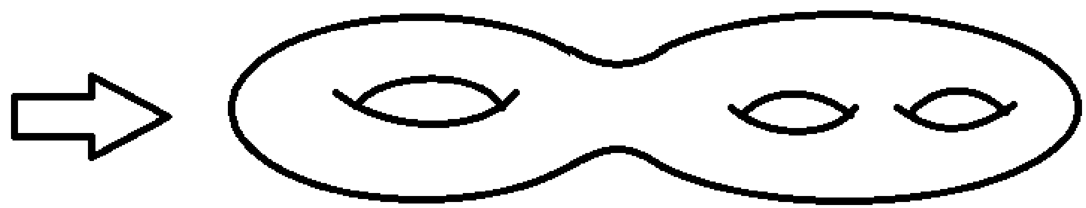
クラインの壺も「見えない曲面」である。

9. 連結和(1)

閉曲面　M= 　N= 

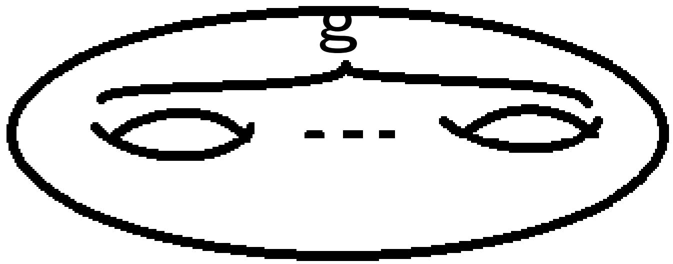
から2次元円板を取り除いて貼り合せる。





MとNの連結和　M # N

１０．連結和（２）

$\Sigma_g =$  種数ｇの閉曲面

Ｔをトーラスとするとき

１．$\Sigma_g \# \Sigma_h = \Sigma_{g+h}$

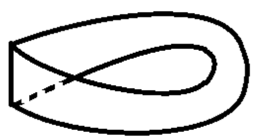
２．$\Sigma_g = T \# T \# \ \ldots \# T$　(g 個)

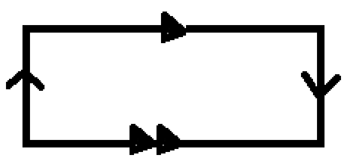
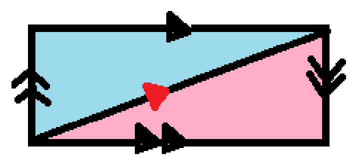
（＝ ｇＴ と表す）

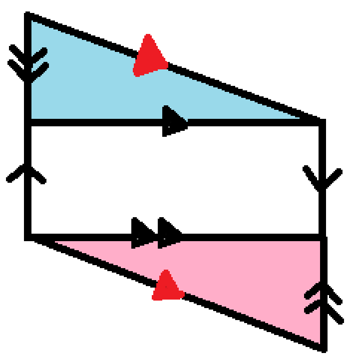
11. 連結和(3)

P = 射影空間、K =クラインの壺　⇒　P ＃ P = K

(証明)

P # P =  と  を境界で貼り合せたもの

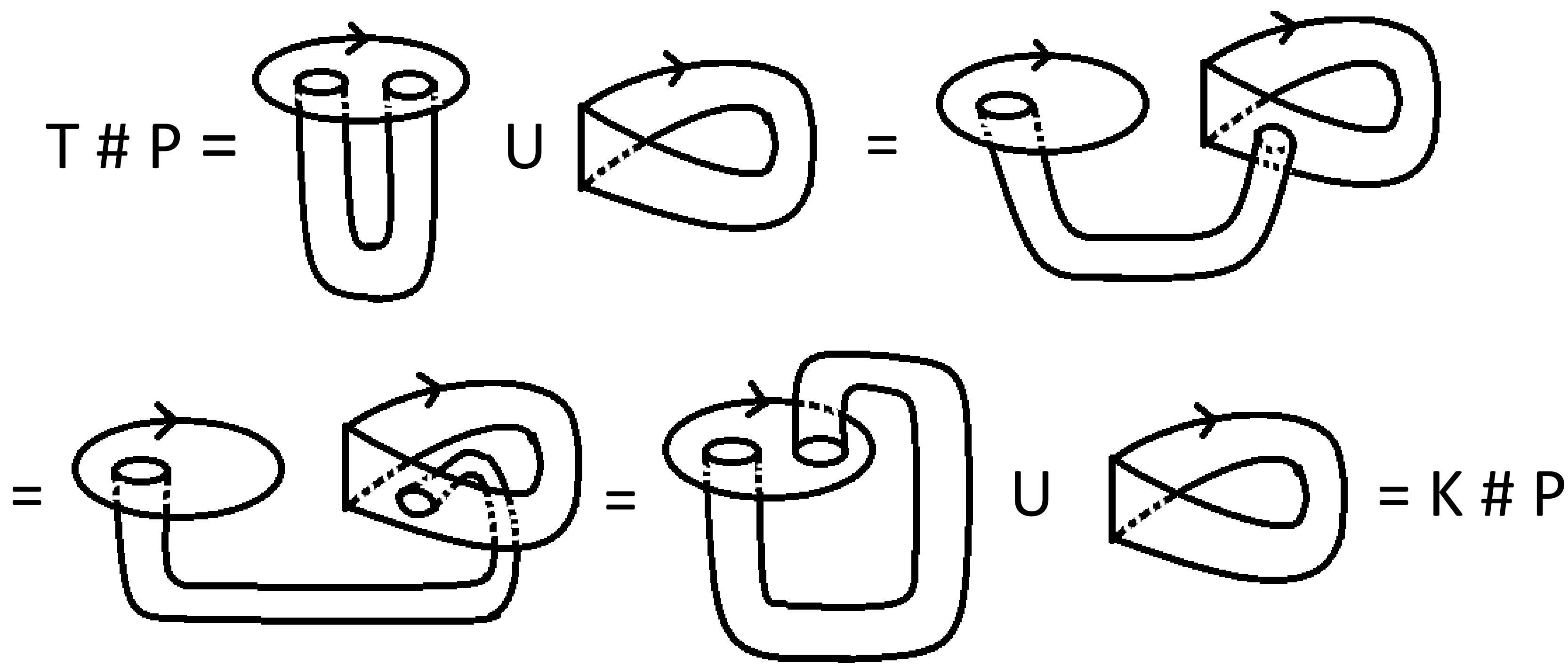
=  と  を貼り合せたもの

=  = K

12. 連結和(4)

P = 射影空間、T = トーラス ⇒　T # P = P # P # P

(証明)



13. 連結和(5)

$$\Sigma_2 \# P = (T \# T) \# P$$
$$= T \# (T \# P)$$
$$= T \# (P \# P \# P)$$
$$= (T \# P) \# (P \# P)$$
$$= (P \# P \# P) \# (P \# P)$$
$$= 5P$$

$$\Sigma_3 \# P = (T \# T \# T) \# P = 7P$$

14. 閉曲面の分類

定理　閉曲面は次のいずれかと同じである。

ｇＴ(ｇ個のトーラスの連結和、ｇは０以上)

（ g=0 のときは球面、g=1 のときはトーラス、

ｇが２以上のときは種数ｇの閉曲面）

「見える」曲面

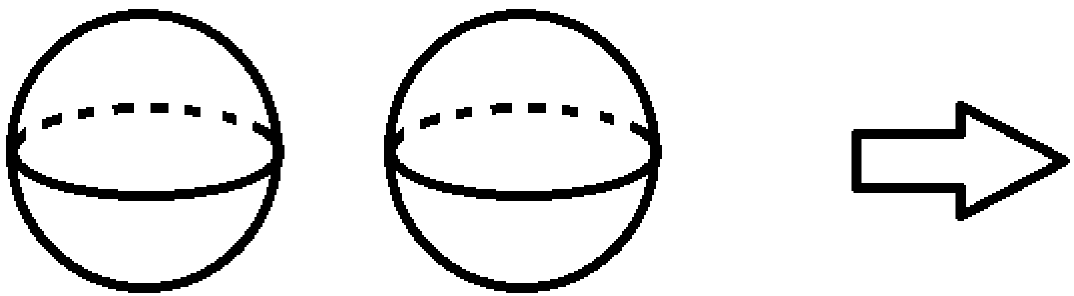
ｎＰ(ｎ個の射影空間の連結和、ｎは１以上)

「見えない」曲面

１５．図形から空間へ

- 「見える」曲面
  ３次元ユークリッド空間の中に入っている。
- 「見えない」曲面
  3次元ユークリッド空間には入らない。
- ユークリッド空間は単なる「入れ物」であり、
  曲面自身が独立した対象である。
- 曲面を「ユークリッド空間内の図形」ではなく、
  「２次元の空間」と考えるべきである。

16. 高次元の空間へ



3次元球面

中のつまった球
（境界は2次元球面）

境界で貼り合せる

問　3次元の空間にはどのようなものがあるか。
もっと高次元の空間ではどうか。
個々の空間には「自然な形」があるか。