「正しい角度の世界地図」

1　地球

- 我々が住んでいる地球が球体の形をしていて、自転しながら太陽の周りを公転していることを知っているでしょう。

  なぜ、そんなことがわかるのでしょうか？

- ギリシャ時代には、地球が球体であることは、月食の影の形などから理解されていました。

- 地球の大きさについて、エラトステネス (276 BC − 194 BC) は、夏至の日の南中時の太陽の高さを南北に位置する２つの地点（エジプトのアスワン北緯２４度６分東経３２度５４分とアレクサンドリア北緯３１度１２分東経２９度５４分）で測り、２つの地点の距離（８４２キロメートル）から、地球の半径を計算しています。

- 地球上の大陸、海、それぞれの都市などの位置を正確に描き表した地図を作ることが次の問題となります。この地図を（ヒッパルコスが発見したといわれる）緯度と経度を用いて描き表したのは、プトレマイオス (AD 83 − AD 168) であるといわれています（緯度を測るのは比較的容易ですが、経度を測るのは容易なことではありません）。

- さて、緯度と経度を１度を単位の長さとして地図を作ると、赤道付近では大体正しい形ですが、北極又は南極に近づくと形がゆがんできます。

- 球面が丸いということは、半径が r の円周の長さが、平面では $2\pi r$ であるが、半径が r の球面上では、それよりも短くなることから測量によりわかります。

- このことから、球面上の任意の２点の間の距離を正確に平面上に写す地図は存在しないことがわかります。

2　円と球面

- 長さが正確に表せないとすると、角度についてはどうでしょうか。実際に、メルカトール図法、ランベルト円錐図法、ステレオ（平射）図法と呼ばれる方法で描かれた地図は、角度を正しく表すことが知られています。このような図法では、狭い範囲の形はほぼ正しく相似な図形となります。

- 数学では、ステレオ（平射）図法で用いられる球面の点と平面の点の対応をステレオグラフ射影（立体射影）と呼んでいます。

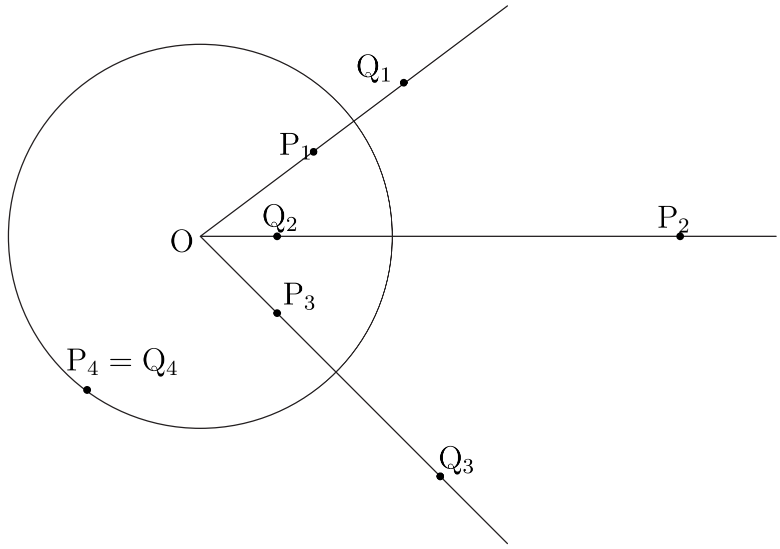
- これについては、DIMENSIONS というビデオの第１章に説明されています。

  `http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/dim_jp/`

- 今日はステレオグラフ射影が角度を保つことを説明しましょう。全部を一気に理解するのは少し難しいかもしれませんが、順番に考えれば必ずわかることです。

3　反転

- まず平面上に中心 O, 半径 r の円 C が与えられているとします。



- **定義**. O 以外の点 P に対し、半直線 OP 上の点 Q で、$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = r^2$ となるものをとることができる。このように O 以外の点 P に対し、点 Q を定める対応を円 C に関する**反転**と呼ぶ。I_C で円 C に関する反転を表すと、

$$I_C(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$$

である。

4　反転の性質 1

- 円 C に関する反転 I_C は次の性質を持ちます。

すぐわかる性質。

P が円 C の周上にあれば、$I_C(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$

P が円 C の内部にあれば、$I_C(\mathrm{P})$ は円 C の外部にある。

P が円 C の外部にあれば、$I_C(\mathrm{P})$ は円 C の内部にある。

$I_C(I_C(\mathrm{P})) = \mathrm{P}$

（無限遠点 ∞ を考えて、$I_C(\infty) = \mathrm{O}$, $I_C(\mathrm{O}) = \infty$ と考えると都合が良いことが多い。）

- ちょっとだけ考えると次のことがわかります。

O を中心とする k 倍の相似拡大で P が $k \cdot \mathrm{P}$ に写るとすると、相似拡大して反転すると、反転して割合で相似縮小したものと等しい。

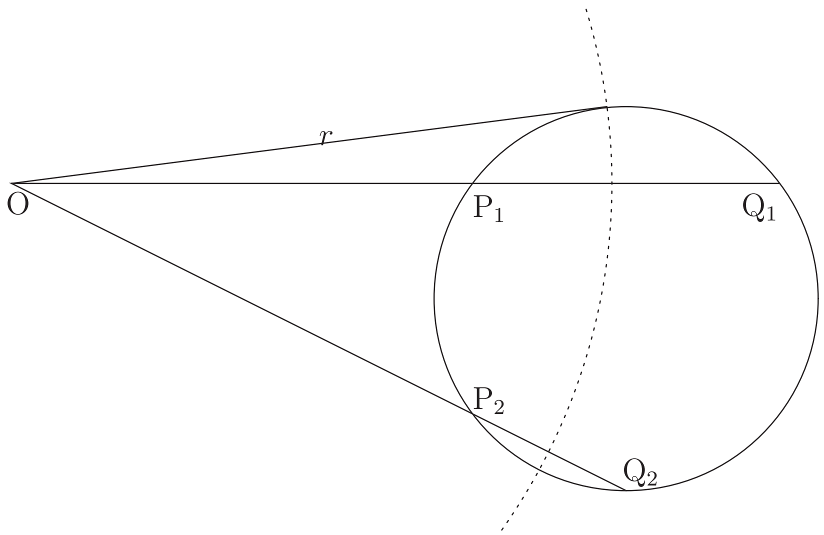
$$I_C(k \cdot \mathrm{P}) = \frac{1}{k} \cdot I_C(\mathrm{P})$$

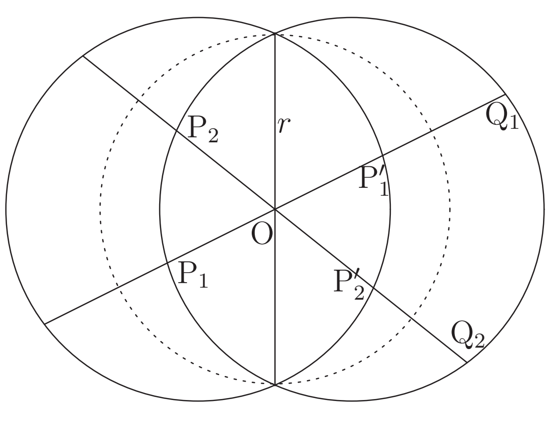
5　反転の性質２

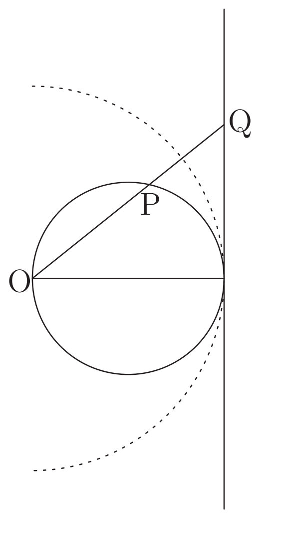
- **重要な性質**
  平面上の円または直線を反転すると円または直線になる。
- このことは、方べきの定理（の逆）により示すことができます。
- **方べきの定理**は、O を通る２つの直線と（中心が O とは限らない円 K の交点について、
  $$\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$$
  が成り立つというものです。
- 方べきの定理は、次のようにして示されます。

  円周角の定理により、三角形 $\mathrm{OP_1Q_2}$, $\mathrm{OP_2Q_1}$ の２つの角度が等しいことがわかる。従って、三角形 $\mathrm{OP_1Q_2}$, $\mathrm{OP_2Q_1}$ は相似である。ゆえに $\mathrm{OP}_1 : \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OQ}_2 : \mathrm{OQ}_1$ である。従って、$\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$ が成り立つ。
- 方べきの定理に出てくるの積の値は、下の図に示した r^2 に等しくなります。r は、O が円 K の外部にあるときには円 K への接線の接点への距離であり、r は O が円 K の内部にあるときには O ついて円 K と対称な円 K' を考えて K と K' の交点への距離です。
- **方べきの定理の逆**とは、次の命題のことです。

  O を通る２つの直線 ℓ_1, ℓ_2 上に、２点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1$, ２点 $\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2$ を $\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OQ}_1 = \mathrm{OP}_2 \cdot \mathrm{OQ}_2$ を満たすようにとる。ただし、直線上に $\mathrm{OP_1Q_1}$, $\mathrm{OP_2Q_2}$ の順に並んでいるか、あるいは直線上に $\mathrm{P_1OQ_1}$, $\mathrm{P_2OQ_2}$ の順に並んでいるとする。このとき、４点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ は１つの円周上にある。







- 上の図は円または直線を図における半径 r の円で反転した時に、どのような円または直線に写るかを描いています。

- つまり、以下のことが成り立っています。
半径 r の円 C に直交する円 Z は、それ自身に写る。
半径 r の円 C の直径の端点を通る円 Z は、O について対称な円 Z' に写る。
半径 r の円 C に接する直線と接点と中心を直径とする円は写りあう。
半径 r の円 C の中心を通る直線は、それ自身に写る。

- 半径 r の円 C に対して上のような位置にない円または直線については、O を中心とする相似拡大（縮小）をして相似考えると次のことがわかります。
O を中心とする半径 r の円 C についての反転 C と O を中心とする相似拡大 M_k の関係から、反転は円または直線を、円または直線に写す。

- さらに、２つの円または直線が交わっているとき、その図形を反転させた２つの円または直線も交わっているが、交わりの角度は等しいことがわかります。

- このことは、上の図において、O **を通る直線と円あるいは直線のなす角度が等しいこと**からわかるのです。この角度は O を中心とする相似拡大（縮小）をしても変わらないことにも注意します。

6　球面についての反転とステレオグラフ射影

- 空間内に中心 O, 半径 r の球面 S が与えられているとします。

- **定義**. O 以外の点 P に対し、半直線 OP 上の点 Q で、$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるものをとることができる。このように O 以外の点 P に対し、点 Q を定める対応を球面 S に関する**反転**と呼ぶ。I_S で球面 S に関する反転を表すと、
$$I_S(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$$
である。

- 球面についての反転は、球面または平面を球面または平面に写すことが、円についての反転が円または直線を円または直線に写すことからわかります。

- なぜなら、２つの球面は、２つの球面の中心を通る直線について、回転対称です。球面と平面のばあいは、球面の中心から平面への垂線について、回転対称です。この回転軸を通る平面上で、円についての反転を考えると、円または直線を円または直線に写っており、それを回転した形になるので、球面についての反転は、球面または平面を球面または平面に写すことがわかります。

- **円についての反転が角度を保つこと**と**球面の中心をとおる平面は、その球面についての反転でその平面自身に写ること**から、球面についての反転も平面または球面の間の角度を保つことがわかります。従って、直線または円の間の角度も保ちます。

- ステレオグラフ射影は、球面上の点を中心とする球面を直径とする球面についての反転であることがわかります。

- 従って、ステレオグラフ射影は角度を保つことになります。