

「正5角形と正20面体」

1 平面図形と立体図形

- 平面幾何で3角形、4角形、5角形、6角形というような図形を習い、その性質を学びます。平面上の図形の性質は、三角形に分けて考えるとわかりやすいことがあります。
- 例えば三角形の内角の和は180度であることが、平行線と直線のなす角の性質(錯角は等しい)ことから示されますが、このことから、4角形の内角の和は360度、5角形の内角の和は540度、6角形の内角の和は720度であることが、それらを三角形に分割することでわかります。
- 空間の図形としては、立方体、三角錐などを学びます。これらは多面体と呼ばれる図形です。多面体は、多角形の面を持ち、面の境界は辺と頂点からなります。
- 特別な例として、正多面体(プラトンの多面体)があります。正多面体は、正4面体、立方体、正8面体、正12面体、正20面体の5つだけあります。これらは、各面が正多角形からなり、各頂点に集まる面の個数が同じであるような図形です。
- 同じような対称性の高い図形としてアルキメデスの多面体と呼ばれているものがあります。
- このようなアルキメデスの多面体の応用については、大きなものでは宇宙船の設計や建築などがありますが、一方で、C60という炭素分子が見つかった後、このような形の分子や高分子を作る研究も盛んに行われています。

2 正5角形

- 正3角形、正方形、正6角形は、比較的親しみのある図形ではないかと思います。
- 正3角形、正方形、正6角形によって、平面を美しく分割することができます。
- このことは、自然の生物、鉱物などの中にも見つけることができます。
- 今日は、正3角形、正方形、正6角形に比べると、少し特別な感じのする正5角形について、考えてみましょう。
- 正5角形は、いろいろな機関のマークや徽章に使われています。星の形は、もっとたくさんところで見受けられます。昔、ピタゴラス学派は、正5角形と星の形を組み合わせた

それでは、正5角形を描くのはどうすればよいでしょうか。

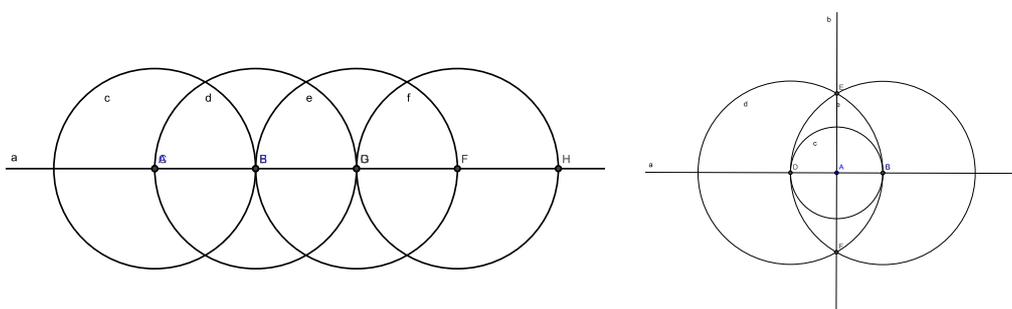
(1) 気合いで描く。

(2) 分度器を使って描く。

分度器がなかったらどうしたらよいでしょうか。三角定規だけでは残念ながら書けません。

(3) 定規とコンパスで描くことができます。

この作図のためには、1つの線分があたえられたとき、その $\sqrt{5}$ 倍の長さの線分が作図できることが重要な鍵となっています。直線上の1つの線分の長さの2倍、3倍の長さは、円を描くことで作図できます。また、直線上の点における垂線も作図できます。



- 直角三角形に対して、「斜辺の長さの2乗は他の2辺の長さの2乗の和に等しい」というピタゴラスの定理が成り立ちます。
- このことから、2等辺直角三角形の斜辺の長さは他の辺の $\sqrt{2}$ 倍であること。辺の長さが2の正三角形の高さは $\sqrt{3}$ であることがわかります。
- それを考えると、 $5 = 2^2 + 1^2$ だから、直角をはさむ2辺の長さが、1と2であるような直角三角形の斜辺の長さが $\sqrt{5}$ であることがわかります。
- $3^2 = 2^2 + 5$ ですから、直角をはさむ2辺の長さが、 $\sqrt{5}$ と2であるような直角三角形の斜辺の長さが3であることがわかります。
- このようなことを使って、この作図のためには、長さ1の線分があたえられたとき、 $\sqrt{5}$ の長さの線分が作図できることになります。

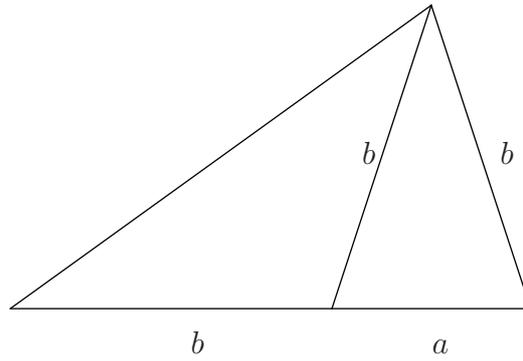
さて、 $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4$ となります。そのことから、辺の長さが、

$$\sqrt{5} - 1, 2, 2$$

であるような2等辺3角形と、辺の長さが、

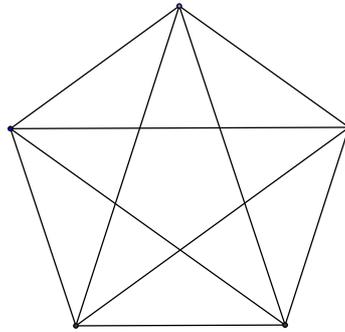
$$2, \sqrt{5} + 1, \sqrt{5} + 1$$

であるような2等辺3角形とは相似であることがわかります。実際、各辺の長さが $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ 倍になっています。次の図が、 $a = \sqrt{5} - 1, b = 2$ として、2つの2等辺3角形を描いたものです。



この図を見ると描いた2等辺三角形の3つの角の大きさは、36度、72度、72度と
なっていることが分かります。

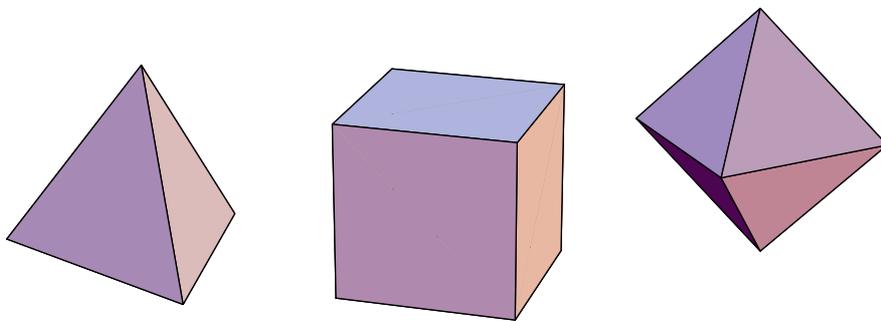
この図が定規とコンパスで作図できるということから、正五角形が定規とコンパスで
作図できることが分かります。

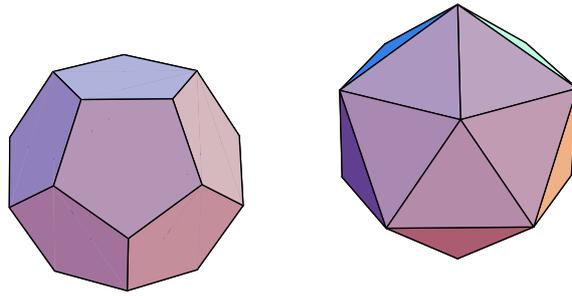


3 正多面体

各面が正多角形であり、各頂点に同じ個数の面が集まっている多面体を正多面体と言
います。今日の後半は、正多面体をどうやって作るか、その展開図の書き方を考えましょ
う。

正多面体は、正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5つだけある
ことが分かっています。それらは、下の図のような図形です。





ここで、各机の上にあるポリドロンで、これらの正多面体を作ってみてください。同じ色の正多角形を組み合わせるとこれらが出来上がるはずです。正多面体の頂点、辺、面の個数を数えてみてください。下の表が合っているかどうか順にチェックしてください。

	正4面体	立方体	正8面体	正12面体	正20面体
面の形 b	正3角形	正方形	正3角形	正5角形	正3角形
面の個数 $ F $	4	6	8	12	20
辺の個数 $ E $	6	12	12	30	30
頂点の個数 $ V $	4	8	6	20	12
頂点に集まる面の数 a	3	3	4	3	5
頂点に集まる角度の和	180度	270度	240度	324度	300度
360度との差	180度	90度	120度	36度	60度
360度との差の和	720度	720度	720度	720度	720度

4 正12面体の展開図

正4面体、立方体、正8面体の展開図は、少し考えれば出来るでしょう。

今日は、正12面体の展開図を描いてみましょう。これが出来れば、正20面体の展開図もすぐにできます。

- 配られている正5角形が2つ描かれているものから、ハサミで正5角形を切り出します。
- ポリドロンの正12面体を見ながら、「正5角形定規」を使って、ケント紙に展開図を描いてみます。
- ポリドロンを分解して、自分が描いた展開図の形に組み合わせてみます。
- 本当の展開図なら、組み合わせたポリドロンを丸めて正12面体が出来上がるはずです。
- 正しい展開図が描けたら、「のりしろ」をどのようにつけばよいか考えてつけましょう。(余裕があれば)
- 展開図をハサミで切りだして、正12面体を作りましょう。

家に帰って、のりづけしてみてください。