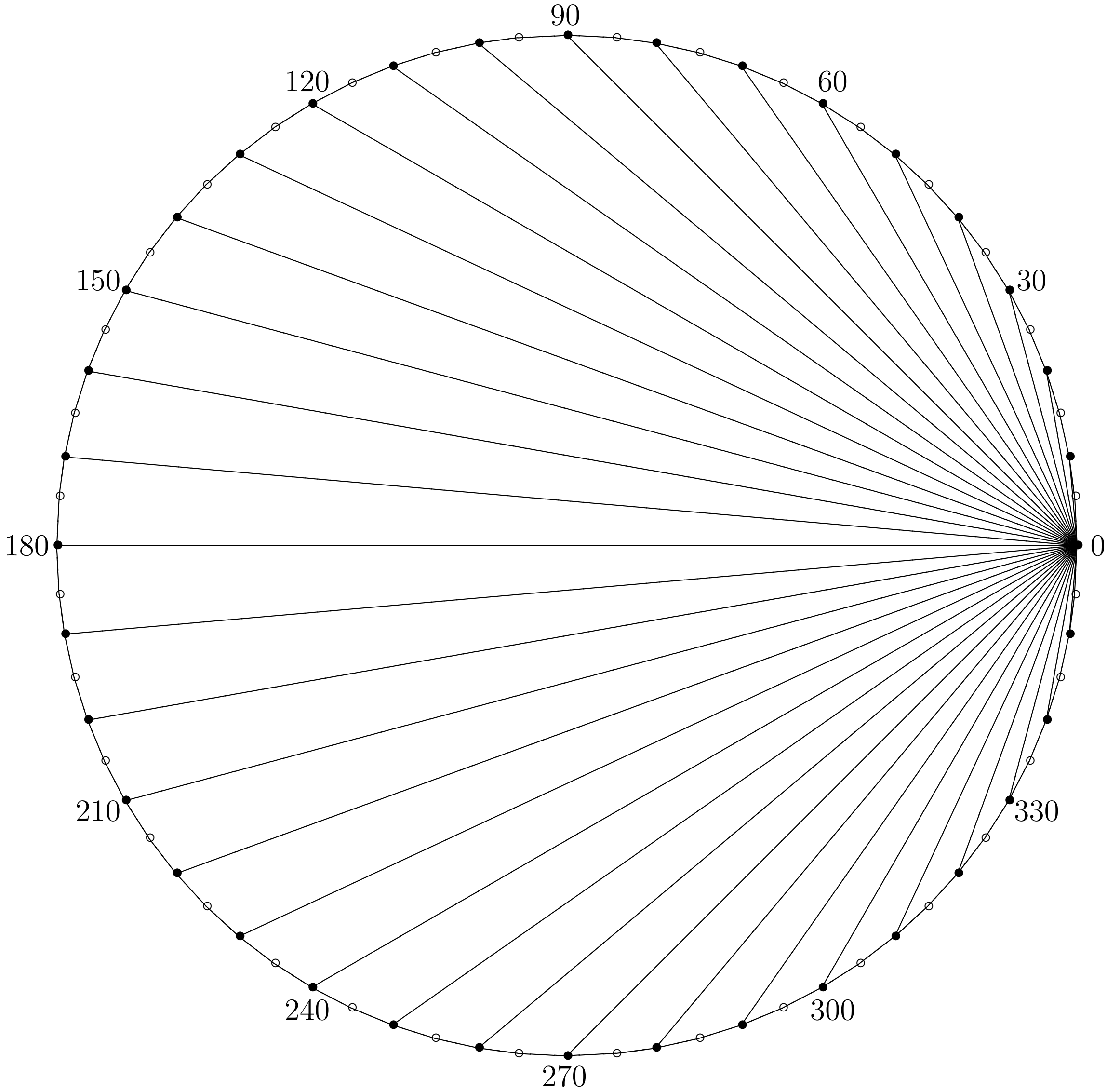
中学生のための玉原数学教室　　　　　　　　　　東京大学玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　大島 利雄　　　　　　　　　　　　　　2009 年 10 月 3 日

「心臓形の話」

(1) 円周上の点光源から出た光が、円周で反射した後の光線を描く（包絡線）

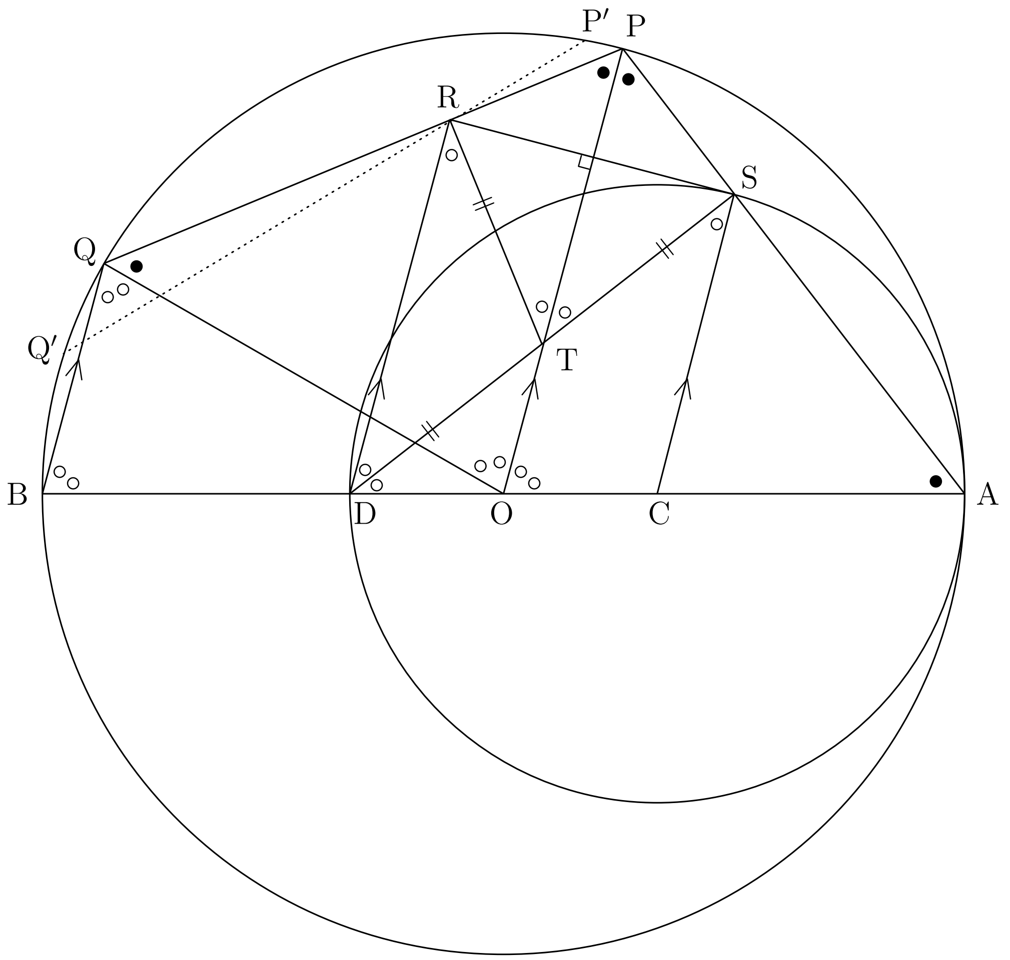


(2) 円周上の一点を端点とする弦を直径とする円を描く（包絡線）

(3) 固定した円周に沿って同じ半径の円を滑らずに転がすときの円上の一点の軌跡

(4) 固定した円周上の一点から円に接する直線への垂線の足の軌跡

(5) 放物線の焦点を原点としたときの反転図形



AB を直径，中心を O とする半径 $\frac{3}{2}$ の円周上で，A からある角度反時計回りに回った円周上の点を P，さらに同じ角度回った点を Q とおく．OA 上 O から $\frac{1}{2}$ の距離の点を C，OB 上 O から $\frac{1}{2}$ の距離の点を D とおき，D を通って OP と平行な直線が PQ と交わる点を R，R を通り OP に直交する直線と AP との交点を S，DS と OP の交点を T とおく。

$$\angle AOP = \angle POQ = \angle QBO, \quad AP : AS = QP : QR = BO : BD = AO : AC = 3 : 2$$

$$OP \mathbin{/\!/} DR \mathbin{/\!/} BQ \mathbin{/\!/} CS, \quad CA = CS = CD = 1, \quad \angle ASD = 90^\circ$$

また OP は RS の垂直二等分線で、$OC = OD$ あるから

$$TR = TS = TD, \quad \angle DRS = \angle CSR = 90^\circ, \quad \angle CDS = \angle CSD = \angle RDT$$

$$\angle PTR = \angle PTS = \angle RDT = \tfrac{1}{2}\angle RDA = \tfrac{1}{2}\angle POA = \tfrac{1}{2}\angle POQ, \quad \angle PRT = 90^\circ$$

よって PQ は DS を直径とする円に R で接し，RS は C を中心とする半径 1 の円に接する。

P と Q と同様に P', Q' を円周上に取る。P' は P に十分近いとする。PQ と $P'Q'$ との交点を R' とおくと，$\triangle PP'R'$ と $\triangle Q'QR'$ は相似となる。$\angle QOQ' = 2\angle POP'$ となるので、P が P' に十分近いときは、$\dfrac{QQ'}{P'P} = \dfrac{Q'R'}{PR'}$，$\dfrac{QR'}{Q'R'}$ はそれぞれ $2, 1$ に十分近い。よって，PQ の三等分点のうち P に近い点が心臓形上の点と考えてよい ((1), (2), (4) が同じ図形)。

放物線

(1) 地上で物を投げたときの軌跡

地球の引力により、投げた物は1秒につき上向き速度が 9.8m/sec ずつ減じ、下向き速度は 9.8m/sec ずつ増加する。よって、9.8m/sec で地上から上向きに投げると1秒後に最高点に達し、2秒後に地上に落下する。地上から Vm/sec で上向きに投げた場合は、$V/4.9$ 秒後に地上に落下する。

同じ速度でボールを投げるとき、どのような方向に投げれば最も遠くまで投げることができるか？

ヒント：斜辺が等しい直角三角形で面積最大のものは？

低いところに投げる場合は？

(2) ある一点（焦点）までと、ある直線（準線）までの距離が等しい点の軌跡

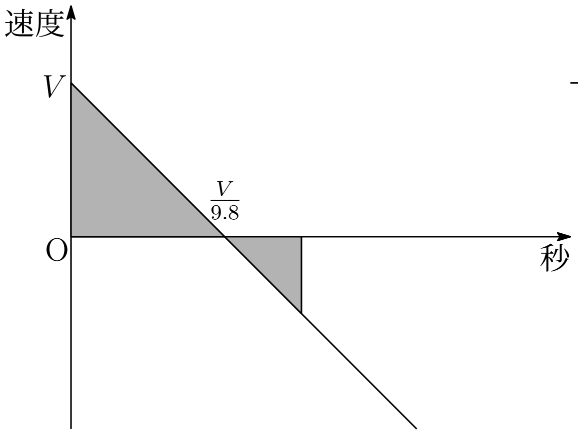
(3) 平行光線を一点に集める（放物面鏡）

パラボラアンテナ（球面のものもある）

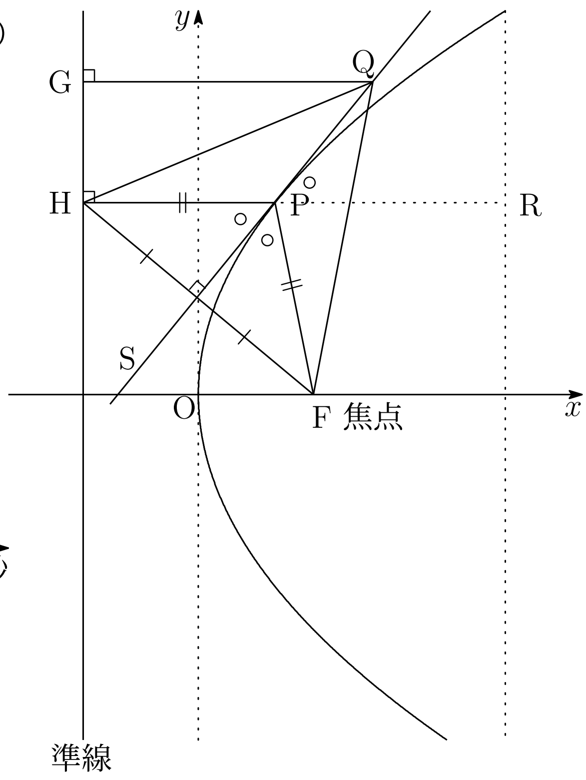
ヘッドライトの反射鏡

(4) 同心円と並行直線

上に速度 Vm/sec で投げた場合



高さ＝面積（の差）



$PH = PF$

直線 QS は HF の垂直二等分線

$GQ < HQ = QF$. よって QS は放物線の接線

また $\angle FPS = \angle HPS = \angle RPQ$