中学生のための玉原数学教室　　東京大学玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　坪井　俊　　2009 年 10 月 3 日

「平方根の話」

1　平方数

1 辺の長さが 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ⋯　の正方形の面積は 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ⋯　である．このように整数の 2 乗になる自然数を**平方数**と呼ぶ.

与えられた自然数が平方数となるかどうかは, どうすればわかるだろうか？

100 までの自然数に平方数は 10 個，10000 までの自然数に平方数は 100 個，1 億までの自然数に平方数は 1 万個，1 兆までの自然数に平方数は 100 万個というわけだから，平方数になる自然数は桁数が多くなるにつれて，少なくなる．その結果，例えば，20 世紀の平方数の日付は 19140625, 19351201, 19580625, 19820304, 19900521, 21 世紀の平方数の日付は 20151121, 20241001, 20720704, 20930625 と，36525 日（−1 日）のうちの 5 日，4 日だけである.

平方数でないことがすぐわかる方法がある．すなわち，平方数の 1 の位は，0, 1, 4, 5, 6, 9 のどれかだから，1 の位が 2, 3, 7, 8 ならばどんなに桁数が多くても平方数ではない.

2　開平法

21 世紀最初の平方数 20151121 の日付は，どのような数の平方（2 乗）かは，次の方法で計算される.

	4 4 8 9
4	20 15 11 21
4	16
84	4 15
4	3 36
888	79 11
8	71 04
8969	8 07 21
9	8 07 21
8978	0

上の計算に習って，次の開平をしてみよ．

$$\sqrt{20\ 24\ 10\ 01}$$

この計算は平方数ならば，1 の位で終わるが，平方数ではない自然数を開平すると，いつまでも終わらない．例えば，2 を開平すると，

	1 4 1 4 2
1	2
1	1
24	1 00
4	96
281	4 00
1	2 81
2824	1 19 00
4	1 12 96
28282	6 04 00
2	5 65 64
28284	38 36

計算を続けると $1.41421356\cdots$ となることがわかる．この数は，分数では表されない無理数である．

上の計算に習って，3 を開平してみよ．

	1
1	3
1	1
	2 00

こうして平方根が求まる理由を考えると，次の桁を求める段階で次の計算をおこなっていることがわかる．すなわち，x に対して $y^2 \leqq x$ となる y まで求まっているとき，$2y$ が左に，$x-y^2$ が右に得られている．次の桁は z としてもとめるが，それは $(2y+z)z \leqq x-y^2$ となる出来るだけ大きな z になるよう 1 桁分だけとる．こうすると，余りは，$x-y^2-(2y+z)z = x-(y^2+2yz+z^2) = x-(y+z)^2$ となり，$y+z$ は平方根により近くなる．そのあとで，$2y+z+z = 2(y+z)$ を計算して 1 段階進むことになる．

$$
\begin{array}{l}
\\
\cdots \\
\underline{\cdots} \\
\cdots \\
\underline{\cdots} \\
2\,y+z \\
\underline{\qquad +z} \\
2(y+z)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\underline{\quad y \ + \ z \qquad} \\
x \\
\underline{\cdots} \\
\cdots \\
\underline{\cdots} \\
x-y^2 \\
\underline{(2y+z)z} \\
x-(y+z)^2
\end{array}
$$

3 無理数

単位の長さを定めてあるとする．線分の長さに対応する数を**実数**と呼ぶ．整数の分数で表される数を**有理数**と呼ぶ．有理数でない実数を**無理数**と呼ぶ．

正の実数 x に対し，$y^2 = x$ となる実数を $\sqrt{x}$ と書き，x の**平方根**と呼ぶ．平方数の平方根は自然数であるが，平方数ではない自然数の平方根は無理数となる．

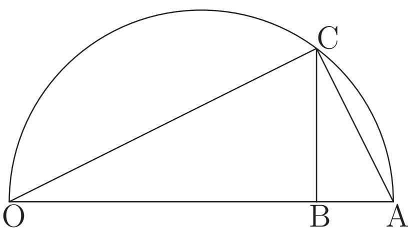
ここで「平方数ではない自然数の平方根は無理数となる」ことの証明を与えるが，少し一般化された数学的帰納法と自然数は素因数分解が一意的にできることを用い，背理法で示す．すぐに理解できなくても，先生にわからないところは聞いて，落ち着いて考えてみるとわかるはずです．

数学的帰納法で証明する．n よりも小なる平方数ではない自然数の平方根は無理数となることが示されていると仮定する（帰納法の仮定）．$\sqrt{n}$ が有理数だとする．このとき，既約分数で表示すると，$\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$ で，自然数 a, b は，1 以外の公約数をもたない（互いに素である）．従って，$n = \dfrac{a^2}{b^2}$，すなわち，$b^2 n = a^2$．n を割り切る素数 p をとる．p は，$b^2 n$ の約数だから a^2 の約数である．素数 p が a^2 を割り切るから，素数 p は a を割り切る．従って，$\dfrac{a}{p} = c$ とすると，$a = pc$ と書かれる．これを $b^2 n = a^2$ に代入して，$b^2 n = p^2 c^2$ を得る．a, b は，1 以外の公約数を持たないから，p^2 は，n を割り切る．従って，$\dfrac{n}{p^2} = m$ とすると，$n = p^2 m$ と書かれる．$m < n$ であり，m が平方数とすると，n が平方数となり仮定に反するから，m は平方数ではない．$n = p^2 m$ を，$b^2 n = p^2 c^2$ に代入すると $b^2 p^2 m = p^2 c^2$，

p^2 を約すと，$b^2m=c^2$, すなわち，$m=\dfrac{c^2}{b^2}$, $\sqrt{m}=\dfrac{c}{b}$ である．これにより，n よりも小なる平方数ではない自然数の平方根はが有理数であることになる．これは帰納法の仮定に反し，矛盾である．この矛盾は，$\sqrt{n}$ が有理数だとしたことから生じたものであるから，$\sqrt{n}$ は無理数であることが証明された．

4　平方根の存在

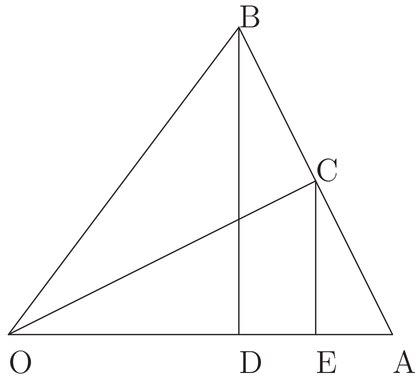
ここでは，長さ a と長さ b を持つ線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{ab}$ を持つ線分が作図できることを示す．



$a>b$ とし，長さ a, b の線分 OA, OB を同じ直線上に同じ向きにとる．OA を直径とする半円を描き，B における垂線と半円との交点を C とする．このとき，角 OCA は，直径の円周角だから，直角である．2 つの直角三角形 OAC, 三角形 OCB は，頂点 O における角を共有しているから掃除である．従って，$\mathrm{OA}:\mathrm{OC}=\mathrm{OC}:\mathrm{OB}$, すなわち，$\mathrm{OC}^2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$ である．線分 OC の長さは，$\sqrt{ab}$ である．

5　2 等辺三角形について

2 つの辺 OA, OB の長さが 1 の 2 等辺三角形について，頂点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を D とする．OD の長さと中線 OC の長さの間に関係式 $\mathrm{OD}=1-2\mathrm{AC}^2$, $\mathrm{OD}=2\mathrm{OC}^2-1$ が成立することを示す（これらは余弦についての倍角の公式と呼ばれるものである）．

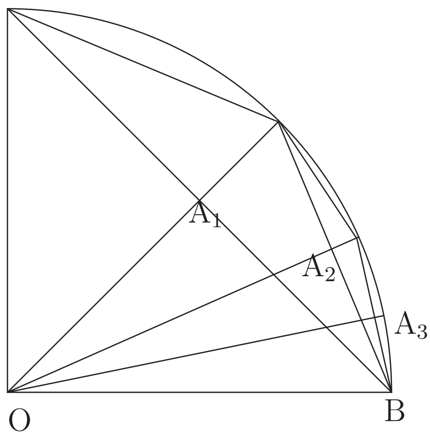


頂点 C から辺 OA に下ろした垂線の足を E とする．直角三角形 OAC, CAE は相似だから，$\mathrm{OA}:\mathrm{AC}=\mathrm{AC}:\mathrm{AE}$ である．$\mathrm{OA}=1$ だから，$\mathrm{AE}=\mathrm{AC}^2$ である．三角形 BDA において，C は辺の中点，BD と CE はともに OA に垂直だから，平行である．従って，$\mathrm{AD}=2\mathrm{AE}$ である．従って，$\mathrm{OD}=\mathrm{OA}-\mathrm{AD}=1-2\mathrm{AE}=1-2\mathrm{AC}^2$ である．これが 1 つ目の関係式である．ピタゴラスの定理から，$\mathrm{OC}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{OA}^2=1$ である．従って，$\mathrm{OD}=1-2\mathrm{AC}^2=1-2(1-\mathrm{OC}^2)=2\mathrm{OC}^2-1$. これが 2 つ目の関係式である．

この関係式を次の節で，$\mathrm{AC}=\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{OD}}{2}}$, $\mathrm{OC}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{OD}+1}{2}}$ の形で使う．

6 開平法と円周率

円周率 π は円周の長さと直径の比である．従って，π は半径 1 の半円の長さである．半径 1 の円に内接する，正方形，正 8 角形，正 16 角形，正 32 角形，$\cdots$ を描いてその周の半分の長さを順に求めることが，開平法を使ってできる．その長さは，正多角形の頂点の個数を増やしていくと π に近づくと考えられる．



以下の計算では，前節で用意した関係式を使っている．

$\mathrm{OA}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.707107...$, $\mathrm{BA}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.707107...$ だから，
半径 1 の正方形の半周は，$4\mathrm{BA}_1=2.82843...$
$\mathrm{OA}_2=\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{OA}_1}{2}}=0.92388...$, $\mathrm{BA}_2=\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{OA}_1}{2}}=0.382683...$ だから，
半径 1 の正 8 角形の半周は，$8\mathrm{BA}_2=3.06147...$
$\mathrm{OA}_3=\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{OA}_2}{2}}=0.980785...$, $\mathrm{BA}_3=\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{OA}_2}{2}}=0.19509...$ だから，
半径 1 の正 16 角形の半周は，$16\mathrm{BA}_3=3.12145...$
$\mathrm{OA}_4=\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{OA}_3}{2}}=0.995185...$, $\mathrm{BA}_4=\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{OA}_3}{2}}=0.0980171...$ だから，
半径 1 の正 32 角形の半周は，$32\mathrm{BA}_4=3.13655...$
$\mathrm{OA}_5=\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{OA}_4}{2}}=0.998795...$, $\mathrm{BA}_5=\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{OA}_4}{2}}=0.0490677...$ だから，

半径 1 の正 64 角形の半周は，$64\mathrm{BA}_5 = 3.14033...$
というようになる．

群馬県藤岡市と関係の深い関孝和 (1642 – 1708) は，正 131072 角形（$131072 = 2^{17}$）を使い，円周率を小数第 11 位まで計算したとのことである．昨年は，関孝和没後 300 年の年であった．

円周率の値の小数第 200 桁までの値は以下のものである．

$$\begin{aligned}\pi = 3.\,&1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\\ &5820974944\ 5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170679\\ &8214808651\ 3282306647\ 0938446095\ 5058223172\ 5359408128\\ &4811174502\ 8410270193\ 8521105559\ 6446229489\ 5493038196\end{aligned}$$

2002 年には，金田康正のグループにより，π の値が，1 兆 2411 億桁まで上に説明したのとは違う方法によって計算機で計算された．

円周率 π が無理数であることは，ランバートにより 1761 年に証明された．さらに，超越数であることが，リンデマンにより 1882 年に証明された．

オイラー (1707 – 1783) は

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を示した．右辺の値は，$1.6449340668482264365\cdots$ であるが，
$\dfrac{1}{10^2}$ までの和は，　$1.5497677311\cdots$，$\dfrac{1}{100^2}$ までの和は，$1.6349839001\cdots$，
$\dfrac{1}{1000^2}$ までの和は，$1.6439345666\cdots$，$\dfrac{1}{10000^2}$ までの和は，$1.6448340718\cdots$ となっている．