中学生のための玉原数学教室　　東京大学玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　坪井　俊　　2008 年 9 月 28 日

# 「球面上の世界」

## 1　地球

我々は地球の上に暮らしている。地球は赤道の長さが４万キロメートルの球である。最も高い山は９キロメートル弱、最も深い海溝は１１キロメートルほどであるから、約６４００キロメートルの地球の半径の３００分の１程度の凹凸しかない。直径１メートルの地球儀を作っても凹凸は１ミリメートルほどである。赤道半径が６３７８ｋｍ、極半径が６３５６ｋｍで、その差のほうが少し大きい。

この大地と海の全体が球をなすことは、２０００年以上前から理解されていた。実際、エラトステネス (276 BC – 194 BC) は、夏至の日の南中時の太陽の高さを南北に位置する２つの地点（エジプトのアスワン北緯２４度６分東経３２度５４分とアレクサンドリア北緯３１度１２分東経２９度５４分）で測り、２つの地点の距離（８４２キロメートル）から、地球の半径を計算している。

幾何学は、２５００年位前から、平面上の幾何学、空間の幾何学として発展してきた。紀元前３００年頃にユークリッド (325 BC – 265 BC) の原論が著わされ、公理に基づく証明の方法が確立してきた。

地球の上にいても我々は普通は平面の上に暮らしているように感じているはずである。地球が丸かったら、端の方にいる人は滑り落ちるだろうというような議論があったが、我々は地球の重力により地表に立っていることを知っている。

さて、地球が丸いことによる影響は、どこに現れるだろうか。平面上では、三角形の内角の和は１８０度になる。球面上ではどうなるだろうか？

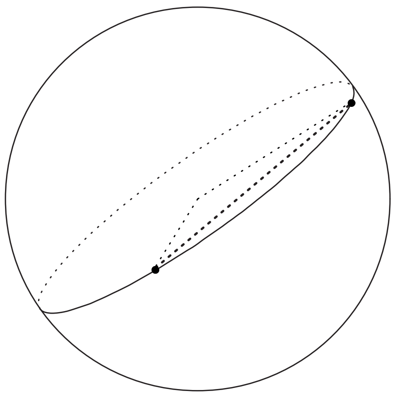
## 2　球面上の線分

まず、球面上の三角形とは何だろうか。平面上の三角形は、３点の２つずつを結ぶ３つの線分を辺とする図形である。三角形の内部は、内部の点を通る直線は、その点の両側で三角形の辺と交わる。（外部の点を通る直線は、その点について片側で三角形の辺と２度交わる。）平行線の公理から、平面上の三角形の内角の和が１８０度であることが証明される。

それでは、球面上の２点をむすぶ線分とは何だろうか。球面上の２点をむすぶ３次元空間の線分は、球の内部にあって、球面上ではみることができない。その線分を真下に見る球面上の線を考えることができる。真下にあるとは、数学的には、中心の方向にあるということと解釈する。重力は地球の中心に向かっているからである。そうすると、この線は、地球の中心と線分を含む平面と球面の交わりとして現れていることがわかる。だから、この線は円の一部である。

空間内の球面と平面の交わり（共通部分）には、円になるか、１点になるか、空集合になるかの３通りの場合がある。１点になるのは、接している時であり、空集合になるとは、交わっていないことである。交わりの円の半径は、０より大きく、球面の半径以下である。

球面の中心を通る平面との交わりとして得られる円の半径は、球面の半径と一致する。このような円を大円と呼ぶ。球面上の２点をむすぶ３次元空間の線分を真下に見る球面上の線は大円の一部であることがわかる。２点が近くにあれば、「線分を真下に見ること」は「中心の方向にあるということ」で、はっきり定義されている。このことの例外、すなわち地球の中心と線分を含む平面が定まらない例外の場合がある。北極と南極を結ぶ線分は、中心を通っているから、線分を含むすべての平面が平面が地球の中心を通る。この場合どの平面を取っても、交わりは大円であり、この大円の半分の半円をとれば、どれも同じ長さである。このときは、２点を結ぶどの大円を取っても良いことにする。



円周の長さは、

$$直径 \times 円周率$$

で求まる。円周の一部をなす円弧の長さは、中心角（円の中心から円弧の両端への２つの線分のなす角度）に比例するから、

$$半径 \times 円周率 \times \frac{中心角}{平角}$$

である。

球面上の２点の距離を、その２点を通る大円の２点を端点とする劣弧の長さと定めることができる。この劣弧は、球面上の２点を結ぶ曲線の中で最小の長さをもつものであり、球面の中心について対称となる場合を除いて、最小の長さをもつ曲線は、一意的に定まり、大円の劣弧になることが証明できる。このような理由で大円は、測地線と呼ばれる。

例えば、玉原国際セミナーハウスは、北緯３６度４７分９秒東経１３９度３分２８秒にある。沼田市役所は、北緯３６度３８分４５秒東経１３９度２分３８秒にある。玉原国際セミナーハウスと沼田市役所の中心角は、８分２６秒＝０．１４０度となる。地球が直径$\dfrac{\text{４００００キロメートル}}{\text{円周率}}$の球面とすると、距離は、

$$\text{２００００キロメートル}\times\frac{\text{０．１４０度}}{\text{１８０度}}=\text{１５．６キロメートル}$$

となる。

東京大学大学院数理科学研究科は、北緯３５度３９分３１秒東経１３９度４１分１３秒にある。玉原国際セミナーハウスと沼田市役所の中心角は、１度１４分１０秒＝１．２３６度となり、距離は

$$\text{２００００キロメートル}\times\frac{\text{１．２３６度}}{\text{１８０度}}=\text{１３７．３キロメートル}$$

となる。

玉原国際セミナーハウスから、北極までの距離は、５９１３キロメートル。玉原国際セミナーハウスから、南極までの距離は、１４０８７キロメートル。玉原国際セミナーハウスから、アレクサンドリアまでの距離は、９４５６キロメートルである（中心角８５．１度）。

## 3　球面の面積

球面の面積は、

$$(\text{半径})^2\times(\text{円周率})\times 4$$

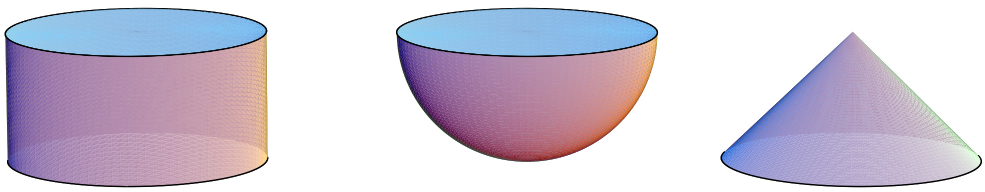
である。一方、球体の体積は、

$$(\text{半径})^3\times(\text{円周率})\times 4\div 3$$

である。円錐、角錐の体積が、

$$\text{底面積}\times\text{高さ}\div 3$$

であることは、知っている人も多いだろう。この円錐、角錐の体積の公式と、球面の面積、体積の公式の関係は、アルキメデス (287 BC – 212 BC)、関孝和 (1642 – 1708) などには、知られていた。



球体の体積の公式は、アルキメデスが次のように導いたと伝えられている。半径が $r$ の半球体（下半分）と半径が $r$ の円板上の高さ $r$ の円錐を並べておく。高さ $r-h$ の平面で切ると、切り口の面積は、半球体が $(r^2-h^2)\times$(円周率)、円錐が $h^2\times$(円周率) となる。合わせると円の面積 $r^2\times$(円周率) となる。これは、半径が $r$ の円板上の高さ $r$ の円柱の切り口の面積である。従って、

半球体の体積＋円錐の体積＝円柱の体積

となる。円錐の体積、円柱の体積は、それぞれ、$r^2\times$(円周率)$\times r\div 3$, $r^2\times$(円周率)$\times r$ だから、半球体の体積は、$r^3\times$(円周率)$\times 2\div 3$, 球体の体積は、$r^3\times$(円周率)$\times 4\div 3$ となる。

平行な平面での切り口の面積が常に等しければ、体積が等しいという命題は、カバリエリ (1598 - 1647) の原理と呼ばれている。

こうして、球面の面積は分かった。球面の面積が分かると２つの大円で区切られる４つの部分の面積がわかる。それは角度に比例するから、２つの大円がなす角度を、$a^\circ$, $b^\circ$ $(a^\circ+b^\circ=180^\circ)$ とすると、(半径)$^2\times$(円周率)$\times 2\times\dfrac{a}{180}$ と (半径)$^2\times$(円周率)$\times 2\times\dfrac{b}{180}$ が対応する部分（２角形）の面積である。

# 4　三角形の面積

平面上の３角形は、３辺の長さを決めれば定まり、その面積も決まる。面積 $S$ を３辺の長さ　$a, b, c$ で表す公式はヘロン (10 AD – 75 AD) の公式と呼ばれ、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおいて、

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

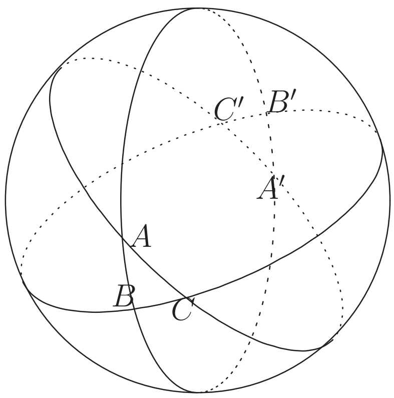
と書かれる。

球面上の三角形も、３辺の長さを決めれば定まる。ただし、各辺の長さは、半径×円周率　未満である。例えば、３辺の長さが、半径×円周率÷２、すなわち大円の長さの４分の１の三角形は、北極に直角を取り、その角の２辺が赤道に交わる２点を取って、描かれる（正）三角形で、３つの角は直角、面積は、球面の面積の８分の１で、$(\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \div 2$ である。球面上の三角形の内角の和は、１８０度になっていない。この三角形では、２７０度である。一般の球面上の三角形の内角の和も１８０度よりも大きい。

このことは次の定理とともに示される。

**定理。** 半径 $r$ の球面上の三角形 $ABC$ の内角を $A^\circ$, $B^\circ$, $C^\circ$ とすると、三角形 $ABC$ の面積 $S$ は, 次の式で表される。

$$S = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times \frac{A+B+C-180}{180}$$




証明は、次のようになされる。難しいことではないけれども、空間にある球面上に点をとることに慣れる必要がある。三角形の辺を含む大円を球面上に描き、球の中心についての $A$, $B$, $C$ の対称点 $A'$, $B'$, $C'$ をとると、三角形の $A'B'C'$ は、三角形 $ABC$ と合同である。三角形 $ABC$ の内角 $A$, $B$, $C$ をもつ２角形の面積を $S_A$, $S_B$, $S_C$ とすると、$S_A \times 2$ は、角 $A$ の２辺を含む大円で区切られる２角形の２つを合わせたものの面積である。同様に、$S_B \times 2$, $S_C \times 2$ は、それぞれ、角 $B$, $C$ の２辺を含む大円で区切られる２角形の２つを合わせたものの面積である。これら、６つの２角形を合わせると、球面を覆い尽くす。良く見ると、三角形 $ABC$、三角形 $A'B'C'$ では、３重に覆っていることがわかる。このことから、

$$S \times 4 + \text{球面の面積} = S_A \times 2 + S_B \times 2 + S_C \times 2$$

を得る。ここで、右辺は $(\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 2 \times 2 \times \dfrac{A+B+C}{180}$, 球面の面積は、$(\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 4$ である。従って、

$$S \times 4 = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 4 \times \{\frac{A+B+C}{180} - 1\}$$

となる。4 で割って、

$$S = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times \frac{A + B + C - 180}{180}$$

が得られる。

こうして、球面上の三角形は、平面上にある三角形とは異なることがわかった。

## 5　宇宙の形

ガウス (1777 – 1855) という人は、多くの数学、物理学上の業績を挙げた天才であるが、彼はこの宇宙空間も平らなユークリッド空間ではないのではないかと考えた。そこで、彼は、３つの離れた地点で、火を焚き、光が直進することを仮定して、大きな三角形の内角の和を測ってみたという。内角の和は、当時の計測技術で、１８０度と判定されたという。（現在の計測技術でも同じであろう。）

現在の宇宙科学では、宇宙は１５０億年前のビッグバンに始まったと考えられている。宇宙は、ある有限の大きさをもっていて、現在は膨張を続けていると考えられている。膨張しているために、同じようには考えられないが、宇宙は（アインシュタイン (1879 – 1955) の相対性理論の効果で）曲がっていることは確認されている。つまり、１つの点から出た光が２つの方向に見えるという重力レンズという現象が確認されている。宇宙の本当の形は、まだ良くわかっていないが、さまざまな研究が続いている。数物連携宇宙研究機構ＩＰＭＵ（村山 斉 機構長）は、その研究の拠点のひとつであり、数学の深い理論と物理学の深い理論のつながりを理解して、宇宙の形とその変化を理解しようとしている。