中学生のための玉原数学教室　　東京大学
「面積と体積」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　坪井　俊　　2007 年 10 月 6 日

「頂点と辺と面」

1　平面図形と立体図形

- 平面幾何で三角形の性質を学びます。平面上の図形は、三角形に分けて考えるとわかりやすいことが多いのです。
- 例えば三角形の内角の和は１８０度であることが、平行線と直線のなす角の性質（錯角は等しい）ことから示されますが、このことから、一般の n 個の頂点と辺をもつ多角形の内角の和は $(n-2)\times 180$ 度であることが多角形を三角形に分割することでわかります。
- 空間の図形としては、立方体、三角錐などを学びます。これらは多面体と呼ばれる図形です。多面体は、多角形の面を持ち、面の境界は辺と頂点からなります。
- 特別な例として、 正多面体（プラトンの多面体）があります。正多面体は後でみるように、正４面体、立方体、 正８面体、正１２面体、正２０面体の５つだけあります。これらは、各面が正多角形からなり、各頂点に集まる面の個数が同じであるような図形です。
- 同じような対称性の高い図形としてアルキメデスの多面体と呼ばれているものがあります。
- このようなアルキメデスの多面体の応用については、大きなものでは宇宙船の設計や建築などがありますが、一方で、C60 という炭素分子が見つかった後、このような形の分子や高分子を作る研究も盛んに行われています。

2　頂点の個数、辺の個数、面の個数

１８世紀の数学者オイラーは、このような多面体の頂点の個数、辺の個数、面の個数について考え、現在オイラーの多面体定理と呼ばれている定理を発見しました。

- これから考える多面体は、立体の表面となっているものです。それは、次の条件を満たしています。
- V を頂点の集合、E を辺の集合、F を面の集合とする。

  （1） １つの辺（E の元）は丁度２つの面（F の元）の辺となる。

  （2） １つの頂点 v（V の元）の周りに集まる面は、頂点 v の近くで頂点 v を取り除いてもつながっている。

- 条件 (1), (2) は、

  (1') 「辺の上の点の近くが面の上の点の近くと同じ形になる」

  (2') 「頂点の近くが面の上の点の近くと同じ形になる」

  という条件と同じです。

- （１）、（２）の条件の下で、図形の様子はどのようになるでしょうか。
- 例えば、正多面体の頂点、辺、面の個数は以下の通りです。

	正４面体	立方体	正８面体	正１２面体	正２０面体
面の形 b	正３角形	正方形	正３角形	正５角形	正３角形
面の個数 $\|F\|$	4	6	8	１２	２０
辺の個数 $\|E\|$	6	１２	１２	３０	３０
頂点の個数 $\|V\|$	4	8	6	２０	１２
頂点に集まる面の数 a	3	3	4	3	5
頂点に集まる角度の和	１８０度	２７０度	２４０度	３２４度	３００度
３６０度との差	１８０度	９０度	１２０度	３６度	６０度
３６０度との差の和	７２０度	７２０度	７２０度	７２０度	７２０度

- （１）,（２）の条件だけで、面の形、頂点に集まる辺の個数については条件を課さない場合でも、$|V| - |E| + |F| \leqq 2$ となることがわかります。

$|V| - |E| + |F|$ が最大値２に等しい場合、すなわち、$|V| - |E| + |F| = 2$ を満たす正多面体は、プラトンの正多面体となることを示しましょう。

- 条件は、面が b 角形、頂点に集まる辺の個数を a とすると、

$$\begin{aligned} 2|E| &= b|F|, \\ a|V| &= 2|E|, \\ |V| - |E| + |F| &= 2 \end{aligned}$$

  で、$a \geqq 3$, $b \geqq 3$ です。

- 上の２つの条件から、$|V|, |F|$ を求め、３番目の式に代入すると $(2/a-1+2/b)|E| = 2$ を解けばよいことになります。
- $2/a - 1 + 2/b > 0$, すなわち、$1/a + 1/b > 1/2$ ですから、$a \geqq 3$, $b \geqq 3$ を満たす解は、

  $(a, b) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$

  の５通りとなります。

- このとき、$|E| = 6, 12, 30$ となって、上の表のものと一致します。実際の図形も図示したものになります。

$|V| - |E| + |F|$ は多面体のオイラー数（オイラー標数、オイラー・ポアンカレ標数）と呼ばれます。

レオンハルト　オイラー について

- 1707 年 4 月 15 日スイス、バーゼルに生まれる。
- 1783 年 9 月 18 日ロシア、サンクトペテルブルグで死去。

3　オイラーの多面体定理

定理. 凸多面体の頂点の個数を $|V|$, 辺の個数を $|E|$, 面の個数を $|F|$ とすると $|V|-|E|+|F|=2$ が成立する。

- 凸多面体とは何でしょうか？
- 凸な図形の数学的定義：
  図形の 2 点を結ぶ線分が必ず図形に含まれる図形
  私たちが見た凸多面体の面は平面の多角形。実際には凸多角形が面となっています。

オイラーの多面体定理の証明のために、まず平面の多角形の分割を考えます。

4　平面の多角形の分割

最初に、平面の多角形の辺の個数と頂点の個数は等しいことが確かめられます。

ここでは、平面の多角形が、線分のあつまりによって（穴のない）多角形に分割されているとき、 $|V|-|E|+|F|=1$ を示します。

- 分割される前の多角形について、 面の数は 1 だから、上の式は成立しています。
- 分割されている多角形について次の操作を考えます。
- 「まず、2 つの面をつなぐように辺を消去する。その後、多角形の内側に突き出した辺と頂点を消去する。」

この操作が必ず出来て、多角形を分割している辺をなくすことができます。 つまり、面の数が 2 以上ならば、隣合う面があるから 辺の消去が可能です。この結果、多角形の内側へ突き出した 辺と頂点が出来たときは、辺と頂点を 先から順に消去していくことが可能です。

この操作で、「$|V|-|E|+|F|$ の値は変わらないこと」と分割している辺がなくなった 1 個の多角形について「$|V|-|E|+|F|=1$」であることから、平面の多角形が、線分のあつまりによって 多角形に分割されているとき、$|V|-|E|+|F|=1$ が示されました。

立体に戻ってオイラーの多面体定理の証明をしましょう。

5　オイラーの多面体定理の証明

- 凸多面体 K は、２つの平面の多角形 $P1$ と $P2$ に、 裏と表が射影できます。
- 裏と表の共通部分 C は $P1$ と $P2$ の境界に射影されています。
- このとき

$$\begin{gathered}K \text{ の辺の数} = P1 \text{ の分割の辺の数} + P2 \text{ の分割の辺の数} - C \text{ の辺の数},\\ K \text{ の頂点の数} = P1 \text{ の分割の頂点の数} + P2 \text{ の分割の頂点の数} - C \text{ の頂点の数},\\ K \text{ の面の数} = P1 \text{ の分割の面の数} + P2 \text{ の分割の面の数}\end{gathered}$$

-

$$\begin{aligned}&|V|_K - |E|_K + |F|_K\\ =&|V|_{P1} + |V|_{P2} - |V|_C\\ &-(|E|_{P1} + |E|_{P2} - |E|_C)\\ &+|F|_{P1} + |F|_{P2}\\ =&1 + 1 + |E|_C - |V|_C = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

6　内角の和

平面の多角形に対して、内角の和は $(n-2) \times 180$ 度でした。これは、外角の和は３６０度とも書くことができます。

凸多面体の多角形の内角の和は $(|V|+2) \times 360$ 度となります。各頂点について (360 度 − 頂点に集まる角の和) を考えてこれらの和をとると、720 度 $= 2 \times 360$ 度 になります。従って、頂点の角度の和 $= (|V| + 2) \times 360$ 度 となります。

正多面体の表を見直すと確かにそうなっています。

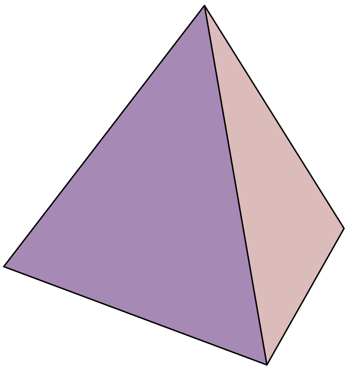
7　２次元多様体

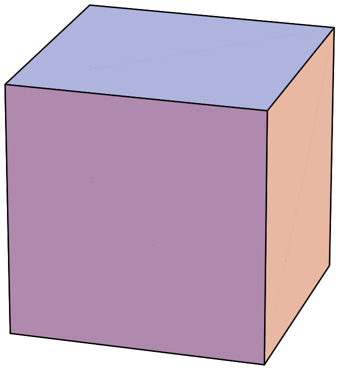
（１）,（２）の条件をみたす多面体（２次元多様体）に対して、$|V| - |E| + |F| \leqq 2$ となることは次のように示されます。

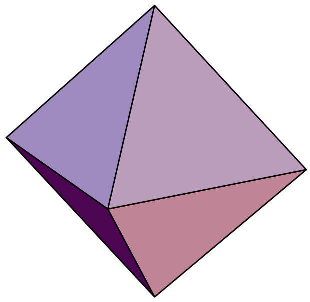
- ２つ以上面がある間は、２つの面をつなぐように辺を消去します。面の数が１個になったときに、頂点と辺のなす図形の頂点の数を減らすように変形します。この変形は、面の上に描かれた 頂点と辺のなす図形として行うことができます。
- この結果、$|V| = 1$, $|F| = 1$ になるから、$|V| - |E| + |F| \leqq 2$ が示されました。

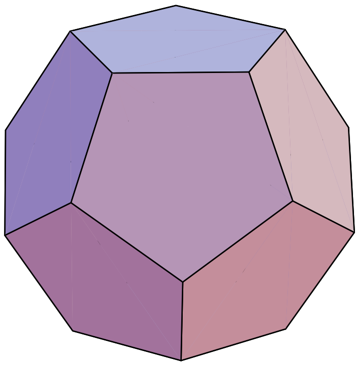
このことは、局所的に面の形が平ら（平面と同相）であるように要請すると、$|V| - |E| + |F| \leqq 2$ という不等式が導かれることを示しています。

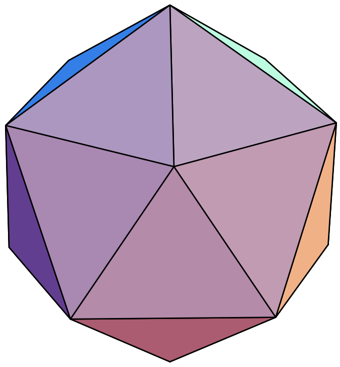
もう少し、精密な議論をすると、$|V| - |E| + |F|$ は曲面の形によって多角形による分割によらず一定の値になることがわかります。多角形で作ったとき、多角形の角度の和は $\{|V| + (|V| - |E| + |F|)\} \times 360$ 度となります。











	正４面体	立方体	正８面体	正１２面体	正２０面体
面の形 b	正３角形	正方形	正３角形	正５角形	正３角形
面の個数 $\|F\|$	４	６	８	１２	２０
辺の個数 $\|E\|$					
頂点の個数 $\|V\|$					
$\|V\| - \|E\| + \|F\|$					
頂点に集まる面の数 a					
頂点に集まる角度の和 S	度	度	度	度	度
３６０度と角度の和 S の差 D	度	度	度	度	度
上の欄の差×頂点の個数 $D \times \|V\|$	度	度	度	度	度